

PREPARATION A L'ENTREE EN MPSI PHYSIQUE – CHIMIE

Au cours de la première année de Physique - Chimie en MPSI, vous allez rencontrer de nouveaux concepts et acquérir de nouvelles méthodes de calcul.

Pour que la formation que vous suivrez soit la plus efficace possible, et pour qu'elle vous permette ainsi de réussir les concours d'entrée aux écoles que vous visez, il est indispensable que vous maîtrisiez le programme du secondaire.

Aussi, au cours des vacances d'été, il est essentiel de retravailler avec soin les cours de Physique-Chimie de Première et de Terminale. **Pour évaluer vos acquis de secondaire, un devoir surveillé de deux heures aura lieu au cours de la semaine de rentrée.**

Quatorze exercices et quelques vidéos vous aideront à approfondir ce programme mais ils ne constituent pas une liste exhaustive.

Les exercices doivent être scannés et rendus par courrier électronique au cours des vacances suivant deux échéances :

- les exercices 1 à 7 devront être envoyés au plus tard le 2 août
- les exercices 8 à 14 devront être envoyés au plus tard le 23 août

Aucun travail ne sera accepté après ces dates.

Vous enverrez en pièce jointe les scans de vos copies aux deux adresses suivantes :

**bbellini@stanislas-cannes.com
bbellini13006@gmail.com**

Vous recevrez par courrier électronique les corrigés de ces exercices quelques jours après ces échéances afin que vous puissiez les travailler en détail et vous préparer ainsi à l'évaluation de rentrée et surtout à l'année à venir.

Dans ce dossier, vous trouverez, outre **les exercices à traiter au cours de la période estivale** (page 7) :

- **Un document sur les équations différentielles en physique-chimie** (page 2) qui sont un outil mathématique que l'on rencontrera dès le début d'année. Vous avez vu en spécialité maths les équations différentielles du premier ordre. Ici, le document rappelle la méthode de résolution de ces équations et traite également un cas particulier d'équations différentielles du deuxième ordre. Bien sûr, je reprendrai tout en détail en classe, mais il est dès à présent indispensable de travailler au cours des vacances ce petit document et de rechercher l'exercice d'application corrigé qui est proposé. Plus vous vous serez familiarisés avec les équations différentielles au cours des vacances, plus il vous sera facile de comprendre et d'appliquer cet outil fondamental au cours de l'année.

- **Des liens vers des vidéos de révision-approfondissement** (page 6) que je vous encourage à travailler en détail. Je vous en transmettrai également le script sur le groupe Whatsapp de la classe, mais je vous invite à les étudier dès à présent.

Si vous avez des questions, n'hésitez pas à me contacter.

La façon la plus efficace de répondre à vos questions est d'utiliser Whatsapp qui me permet de vous envoyer des messages vocaux détaillés plutôt que quelques lignes par courrier électronique.

Vous pouvez me joindre au 06.80.58.02.15.

Je vous invite, dès réception de ce document, à m'envoyer un message via Whatsapp pour que je puisse constituer un groupe sur lequel je vous transmettrai différents documents et informations au cours de l'année.

Certaines et certains d'entre vous ont peut-être déjà un projet bien défini. Néanmoins, je sais que d'autres – et c'est normal – n'ont pas encore d'idée bien déterminée.

Etes-vous plutôt attiré(e) par l'aéronautique, l'informatique... ? Vous pouvez dès à présent commencer à y réfléchir en vous aidant d'Internet, de votre entourage...

En particulier, le site du Service des Concours aux Ecoles d'Ingénieurs (SCEI) : <http://www.scei-concours.fr/> comporte, entre autres, une liste des écoles d'ingénieurs et des informations relatives aux concours d'entrée à ces écoles.

Commencer à réfléchir à un projet professionnel vous permettra d'entretenir votre motivation tout au long de l'année.

Bonnes vacances.

Boris Bellini Professeur de Physique – Chimie et professeur principal en MPSI
Préparation à l'entrée en MPSI – Physique - Chimie – bbellini@stanislas-cannes.com

INTRODUCTION AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. L'équation différentielle : une relation reliant une fonction et sa (ses) dérivées

Dès les premiers chapitres que nous aborderons cette année, nous allons rencontrer des équations différentielles du premier ordre et du deuxième ordre.

Souvent, lorsque l'on cherche à déterminer l'évolution d'une grandeur $f(t)$ (qui représente par exemple la position d'un objet, l'intensité du courant dans un circuit, le nombre de noyaux radioactifs présents à un instant t , etc...) en fonction du temps (ou en fonction des coordonnées d'espace), on peut trouver une équation qui relie cette grandeur à sa dérivée première et sa dérivée seconde (on va très rarement au-delà !). Cette équation est appelée équation différentielle et sa résolution permet de déterminer la fonction recherchée. Par exemple : $2f' + 3f = 5$ est une équation différentielle.

2. Comment résoudre une équation différentielle : plusieurs cas possibles

Nous rencontrerons différents types d'équations différentielles.

- Certaines sont calquées sur un modèle dont la solution est bien connue et qu'il vous suffira de reconnaître.
- D'autres nécessitent d'avoir recours à une « astuce », mais vous verrez dès le début d'année que ce cas deviendra aussi rapidement classique pour vous
- Enfin, d'autres équations différentielles ne peuvent être résolues de manière analytique (c'est-à-dire « à la main »). Elles nécessiteront d'avoir recours à une résolution numérique, ce qui signifie qu'il faudra les faire résoudre par un ordinateur, à l'aide d'un logiciel ou d'un algorithme que vous écrirez.

3. Résolution d'une équation différentielle calquée sur un modèle connu

Les deux modèles importants qu'il vous faudra mémoriser et savoir reconnaître dès le début d'année sont les suivants :

a. Premier modèle : équation différentielle du premier ordre à coefficients constants

Une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants est une relation entre une fonction f de la variable ¹ t et sa dérivée première par rapport à la variable t que l'on note ² $\frac{df}{dt}$. Cette relation s'écrit :

$$\frac{df}{dt} + af = b$$

où b est un réel et a est un réel non nul.

La fonction $t \rightarrow f(t)$ qui est solution de cette équation, c'est-à-dire la fonction qui vérifie cette équation différentielle, a pour forme :

$$f(t) = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$$

Le coefficient A est appelée constante d'intégration. C'est un réel quelconque ce qui signifie que pour toute valeur réelle de A , la fonction f vérifie l'équation différentielle précédente.

Toute fonction du type $Ae^{-at} + \frac{b}{a}$ convient...mais en Physique il faut tenir compte de la condition initiale, c'est-à-dire de la valeur $f(0)$ de la fonction pour l'instant $t=0$ ³.

¹ En Physique, on note t la variable dont dépend la fonction f plutôt que x car la plupart des fonctions que nous rencontrerons cette année dépendent du temps mais ceci n'est qu'une notation. Si on choisit la variable x , l'équation différentielle serait : $\frac{df}{dx} + af = b$ et la solution : $f(x) = Ae^{-ax} + \frac{b}{a}$.

² Plutôt que $f'(t)$ comme on le ferait en Mathématiques.

³ Là encore, il se peut que l'on ait une information sur la fonction f non pour $t=0$ mais pour une autre valeur t_i de t . On peut alors déterminer la valeur de A à partir de cette valeur en t_i de la même façon.

Ceci impose alors une valeur particulière pour A .

Pour le comprendre, résolvons notre première équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

Exemple 1 : déterminer la fonction $t \rightarrow f(t)$ vérifiant l'équation différentielle $\frac{df}{dt} + 2f = 5$ avec la condition initiale $f(0) = 4$.

L'équation différentielle est de la forme $\frac{df}{dt} + af = b$ avec $a = 2$ et $b = 5$.

On reconnaît le premier modèle présenté ci-dessus donc $f(t)$ s'écrit : $f(t) = Ae^{-2t} + \frac{5}{2}$

Pour déterminer la constante d'intégration A , on utilise la condition initiale $f(0) = 4$.

Ainsi, en remplaçant t par 0 dans l'expression de t et en égalant à 4, il vient : $Ae^{-2 \times 0} + \frac{5}{2} = 4$

Donc : $A + \frac{5}{2} = 4$ ce qui donne $A = \frac{3}{2}$.

La solution de l'équation différentielle est donc : $f(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}$

b. Deuxième modèle : équation différentielle du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants est une relation entre une fonction f de la variable t , sa dérivée première $\frac{df}{dt}$ et sa dérivée seconde $\frac{d^2f}{dt^2}$ par rapport à t . Cette relation s'écrit :

$$\frac{d^2f}{dt^2} + 2\lambda \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = b$$

Nous verrons comment résoudre cette équation différentielle au cours de l'année mais commençons par une version simplifiée où $\lambda = 0$:

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \omega_0^2 f = b$$

Cette équation différentielle joue un rôle essentiel en Physique. Vous la rencontrerez souvent au cours de votre scolarité car elle décrit l'évolution temporelle des systèmes qui oscillent sans amortissement et que l'on qualifie d'oscillateurs harmoniques. Ce sera notre deuxième modèle d'équation différentielle.

Si une fonction f vérifie cette équation différentielle, alors elle s'écrit nécessairement :

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{b}{\omega_0^2}$$

Les coefficients A et B sont les constantes d'intégration⁴. Ce sont deux réels quelconques ce qui signifie que pour toute valeur réelle de A et de B , la fonction $f(t)$ vérifie l'équation différentielle précédente.

Toute fonction du type $f(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{b}{\omega_0^2}$ convient...mais en Physique il faut tenir compte des conditions initiales, c'est-à-dire de la valeur $f(0)$ de la fonction et de la valeur de sa dérivée $\frac{df}{dt}(0)$ à l'instant $t = 0$ ⁵.

Ces conditions initiales imposent des valeurs particulières pour A et pour B

Pour nous familiariser avec ce type d'équations différentielles, résolvons-en une de ce type.

Exemple 2 : déterminer la fonction $f(t)$ vérifiant l'équation différentielle $\frac{d^2f}{dt^2} + 9f = 2$ avec les conditions initiales $f(0) = 4$ et $\frac{df}{dt}(0) = 1$.

L'équation différentielle est de la forme $\frac{d^2f}{dt^2} + \omega_0^2 f = b$ avec $\omega_0^2 = 9$ (donc $\omega_0 = 3$) et $b = 2$.

⁴ Remarquez que pour une équation différentielle du premier ordre, il apparaît une constante d'intégration alors que pour une équation différentielle du second ordre, comme c'est le cas ici, il en apparaît deux. Il faut donc, dans ce dernier cas, deux conditions initiales pour déterminer ces deux constantes.

⁵ Il se peut que l'on ait une information sur la fonction $f(t)$ et sur sa dérivée non pour $t = 0$ mais pour une autre valeur de t . On peut alors déterminer les valeurs de A et B à partir de cette valeur de la même façon.

On reconnaît le deuxième modèle d'équation différentielle. Donc $f(t)$ est de la forme :

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{b}{\omega_0^2} \text{ avec } \omega_0 = 3 \text{ et } b = 2$$

$$\text{D'où: } f(t) = A \cos(3t) + B \sin(3t) + \frac{2}{9}$$

Pour déterminer les deux constantes d'intégration A et B , on utilise les deux conditions initiales $f(0) = 4$ et $\frac{df}{dt}(0) = 0$.

Pour exprimer $\frac{df}{dt}(0)$, il nous faut calculer la dérivée de $f(t) = A \cos(3t) + B \sin(3t) + \frac{2}{9}$, ce qui donne : $\frac{df}{dt} = -3A \sin(3t) + 3B \cos(3t)$

Ainsi, en remplaçant t par 0 dans l'expression de $f(t)$ et de sa dérivée, il vient :

$$f(0) = A \cos(0) + B \sin(0) + \frac{2}{9} = 4 \text{ autrement dit : } A + \frac{2}{9} = 4. \text{ Donc : } A = \frac{34}{9}$$

$$\frac{df}{dt}(0) = -3A \sin 0 + 3B \cos(0) = 1 \text{ autrement dit : } 3B = 1. \text{ Donc : } B = \frac{1}{3}$$

Donc la solution de l'équation différentielle est la fonction : $f(t) = \frac{34}{9} \cos(3t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{2}{9}$

Pour vous familiariser avec les équations différentielles, et leur application à la Physique, voici un exercice résolu qui est extrait du premier chapitre de Physique de MPSI sur les oscillateurs harmoniques, c'est-à-dire les systèmes qui oscillent sans être amortis.

Cherchez-le activement avant de lire la solution.

4. Exercice d'application corrigé

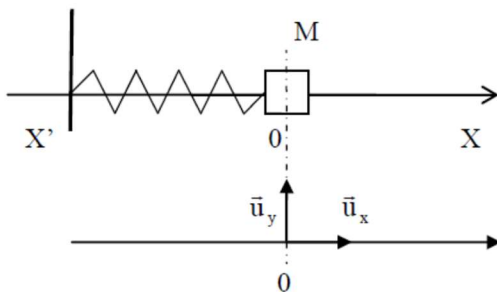
Un objet de masse m peut glisser sans frottement sur un rail horizontal $X'X$ fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Cet objet est relié à un ressort de constante de raideur k et dont l'autre extrémité est fixe.

La position de l'objet est repérée par son abscisse x . L'abscisse $x = 0$ correspond au ressort au repos.

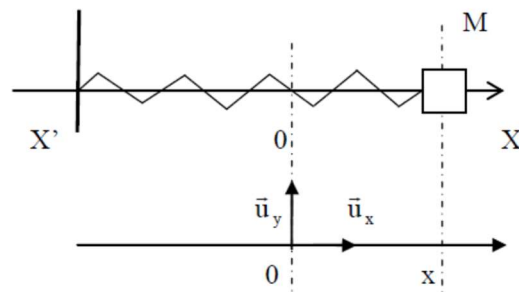
Le ressort est écarté vers la droite d'une distance $L > 0$ par rapport à sa position d'équilibre et, à l'instant initial de date $t = 0$, il est lâché sans vitesse. Les conditions initiales pour la fonction $x(t)$ sont donc :

$$x(0) = L \text{ (position initiale du ressort)}$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 \text{ (vitesse initiale du ressort)}$$



Ressort non déformé



Ressort déformé de x

Donnée : la force exercée par le ressort sur la masse s'écrit $\vec{F} = -kx \vec{i}$ où x est l'allongement du ressort et k la constante de raideur.

1. Faire un bilan des forces qui s'exercent sur l'objet puis appliquer la deuxième loi de Newton.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$ repérant la position de l'objet.
3. En résolvant l'équation différentielle et en tenant compte des conditions initiales, déterminer la fonction $x(t)$ décrivant la position de la masse au cours du temps.

Solution de l'exercice d'application 2

1. Bilan des forces : poids $\vec{P} = -mg \vec{j}$ force de rappel exercée par le ressort $\vec{F} = -kx \vec{i}$ et réaction normale $\vec{R}_N$ du support.

Deuxième loi de Newton appliquée à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

En projection sur l'axe horizontal (Ox) :

$$m\ddot{x} = -kx$$

2. L'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$ apparaît déjà à la question précédente. On peut la mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

3. On reconnaît le deuxième modèle vu au 3.b. car l'équation différentielle ci-dessus est de la forme

L'équation différentielle est de la forme $\frac{d^2f}{dt^2} + \omega_0^2 f = b$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$) et $b = 0$.

La solution est donc de la forme : $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{b}{\omega_0^2}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $b = 0$.

$$\text{D'où : } x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

On détermine les constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions initiales :

$$x(0) = L \text{ entraîne } A \cos(0) + B \sin(0) = L \text{ donc : } A = L$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 \text{ entraîne } -\sqrt{\frac{k}{m}}A \sin(0) + B \sqrt{\frac{k}{m}} \cos(0) = 0$$

$$\text{Donc : } 0 + B \sqrt{\frac{k}{m}} = 0$$

$$\text{Autrement dit : } B = 0$$

Ainsi, la position de la masse le long de l'axe au cours du temps est décrite par la fonction :

$$x(t) = L \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Il s'agit d'une sinusoïde qui oscille entre les valeurs $+L$ et $-L$.

⁶ Pour appliquer la deuxième condition initiale, il faut commencer par calculer la dérivée de la fonction $x(t)$.

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \text{ donc en dérivant on obtient : } \frac{dx}{dt}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Les deux premiers chapitres sont consacrés à la mécanique et le troisième à l'intégrale qui joue un rôle fondamental en physique.

Je peux également vous envoyer ces liens par Whatsapp ainsi que leurs scripts, à la demande.

CHAPITRE 1 : forces et deuxième loi de Newton (six parties)

<https://www.youtube.com/watch?v=-Syi3TuSUUs>

<https://www.youtube.com/watch?v=C14QHVo6nk>

<https://www.youtube.com/watch?v=Y8AlZKRIMbM>

<https://www.youtube.com/watch?v=6plZzgZcoNs>

<https://www.youtube.com/watch?v=1tZzdT-TzY8>

<https://www.youtube.com/watch?v=75c0NsRS-cg>

CHAPITRE 2 : approche énergétique en mécanique (cinq parties)

<https://www.youtube.com/watch?v=t7kQ1F56RnA>

<https://www.youtube.com/watch?v=1BKpyCVUixk>

<https://www.youtube.com/watch?v=6ZsLQveLQOQ>

<https://www.youtube.com/watch?v=Itpr8a0Qzok>

<https://www.youtube.com/watch?v=eOsWvmCdwI4>

CHAPITRE 3 : l'intégrale en physique (deux parties)

<https://www.youtube.com/watch?v=dAGG0WjHCos>

<https://www.youtube.com/watch?v=TtK9eebGOeI>

EXERCICES DE PHYSIQUE

- Tout résultat doit être justifié.
- Lorsqu'il est demandé de déterminer la valeur d'une grandeur physique ou chimique, il faut toujours commencer par établir une expression littérale (autrement dit en fonction des symboles d'autres données du problème) de la grandeur concernée et la mettre en évidence avant de passer à l'application numérique.
- Une grande attention doit être portée à la rédaction et à la présentation de chacun de vos travaux.

EXERCICE 1 : mouvement vertical d'un objet dans un champ de pesanteur

A l'instant initial, une pierre de masse $m = 50 \text{ g}$, assimilée à un point matériel, est lancée verticalement vers le haut, à partir d'un point O, situé $1,5 \text{ m}$ au-dessus du sol, avec une vitesse $v_0 = 5 \text{ m.s}^{-1}$. On repère sa position sur un axe vertical (Oz) orienté vers le haut, $(O, \vec{k})$ et on prend pour origine O le point d'où est lancée la pierre. On note $\vec{g} = -g \vec{k}$ le champ de pesanteur où $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que $\frac{dv}{dt} = -g$.
2. En déduire la fonction $v(t)$ donnant la vitesse de la pierre.
3. Quelle relation lie les fonctions $z(t)$ donnant la position de la pierre sur l'axe vertical (Oz) et $v(t)$? En déduire, à la date t , la position $z(t)$ de la pierre sur l'axe vertical.
4. Que peut-on dire de la vitesse de la pierre au sommet de la trajectoire ? En déduire la date t_s à laquelle le sommet de la trajectoire est atteint.
5. A l'aide de ce qui précède, déterminer à quelle distance H du point de lancer O la pierre atteint le point d'altitude la plus élevée. Puis retrouver ce résultat à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique, dont vous justifierez l'emploi.
6. A quelle date t_B et avec quelle vitesse v_B la pierre tombe-t-elle sur le sol au point B ?

EXERCICE 2 : trajectoire d'un projectile dans le champ de pesanteur

A l'instant initial de date $t = 0$, on lance dans l'air un objet supposé ponctuel d'un point O pris pour origine du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec une vitesse de norme v_0 faisant un angle α avec l'horizontale.

Le vecteur $\vec{i}$ est horizontal et le vecteur $\vec{j}$ est vertical. $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les forces de frottement et la poussée d'Archimède sont négligées.

On repère l'objet par ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note $\vec{g} = -g \vec{j}$ le champ de pesanteur.

1. Quelles sont les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant initial dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$?
2. Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ vérifient les équations :

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

3. Déduire de ce qui précède les équations horaires du mouvement, c'est-à-dire l'expression des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
 4. En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire c'est-à-dire la relation entre les coordonnées x et y . Quelle est la nature de cette trajectoire ?
 5. Quelle est l'expression du vecteur vitesse lorsque l'objet atteint l'altitude maximale ?
 6. En déduire l'expression littérale de l'altitude maximale atteinte par l'objet.
- Indice : vous commencerez par déterminer la date t_{MAX} pour laquelle cette altitude maximale est atteinte.*
7. Retrouver le résultat de la question 6 en utilisant la conservation de l'énergie mécanique (après avoir justifié son emploi) entre le point O et le point d'altitude maximale.
 8. A quelle distance du point O, exprimée de manière littérale, l'objet retombe-t-il ?

EXERCICE 3 : satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire de masse m reste constamment à la verticale d'un point donné de la Terre. La Terre est assimilée à une boule de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m et de masse $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg.

Données : jour sidéral $T = 23$ h 56 min ; constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I.

On note v la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique et h son altitude, repérée à partir du sol.

1. Rappeler la définition du référentiel géocentrique.
2. A l'aide de l'expression de la période T et de la deuxième loi de Newton, déterminer deux relations faisant intervenir les deux inconnues du problème : la vitesse v du satellite et son altitude h , repérée à partir du sol.
3. Déterminer l'expression de la vitesse v de ce satellite dans le référentiel géocentrique en fonction des données du problème puis calculer sa valeur.
4. Dédurre de ce qui précède l'expression de l'altitude h du satellite en fonction des données du problème puis calculer sa valeur.
5. A l'aide d'une relation établie plus haut, retrouver la troisième loi de Kepler.

EXERCICE 4 : énergie mécanique d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Un ion He^{2+} arrive au point O avec une vitesse négligeable. Entre la plaque de gauche et la plaque de droite, il est accéléré sous l'effet d'un champ électrostatique uniforme créé par la différence de potentiel U_{OA} entre les deux plaques.

Données : masse molaire de l'ion He^{2+} : $M(He^{2+}) = 4,0$ g.mol $^{-1}$;

intensité du champ de pesanteur : $g = 10$ m.s $^{-2}$;

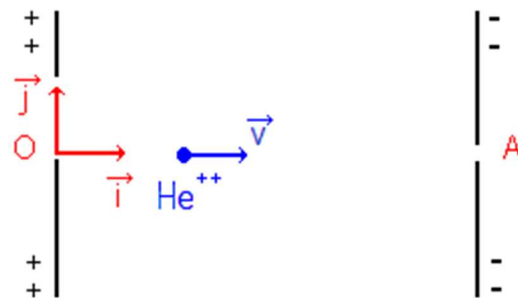
charge de l'électron $q = -1,6 \times 10^{-19}$ C ;

masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23}$.mol $^{-1}$;

distance entre les plaques $OA = 20$ cm ;

différence de potentiel entre les plaques : $U_{OA} = V_O - V_A = 100$ V



1. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$, donner la valeur de son intensité et représenter les lignes de champ entre les deux plaques.
2. Déterminer la norme du vecteur force électrique $\vec{F}$ agissant sur l'ion He^{2+} .
3. Montrer que le poids est négligeable devant la force électrique $\vec{F}$.
4. Calculer le travail $W_{OA}(\vec{F})$ de la force électrique $\vec{F}$ due au champ $\vec{E}$, entre les points O et A, sur l'ion He^{2+} .
5. A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse v_A de l'ion He^{2+} au point A.

EXERCICE 5 : particule chargée dans un champ uniforme bis

Un électron de charge $q = -e$, de masse m , arrive dans le vide, à l'instant $t = 0$ au point origine O du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec une vitesse initiale: $\vec{V}_0 = V_0 \vec{i}$.

Cet électron est alors soumis à l'action d'un champ électrostatique uniforme : $\vec{E} = -\frac{U}{d} \vec{j}$ où $U = V_P - V_N > 0$ est la différence de potentiel entre deux plaques P et N qui délimitent une zone d'espace définie par : $0 < x < L$ et $-d/2 < y < d/2$.

On néglige le poids de l'électron devant la force électrostatique.

On repère la position de l'électron par ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ vérifient les équations:

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -\frac{e}{m}E$$

Remarque : les deux points sur les fonctions x et y signifient que ce sont les dérivées secondes. On peut noter $\ddot{x}$, x'' ou encore $\frac{d^2x}{dt^2}$ pour évoquer la dérivée seconde de x par rapport au temps.

- Déduire de ce qui précède les équations horaires du mouvement c'est-à-dire l'expression des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
- En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire de l'électron, c'est-à-dire la relation entre les coordonnées x et y . Quelle est la nature de la trajectoire ?
- Donner la condition sur la tension U pour que la particule sorte du champ sans heurter les plaques.
- Cette condition réalisée, déterminer l'expression littérale de l'angle de déviation, c'est-à-dire l'angle α dont a été dévié l'électron être passé entre les plaques, en fonction des données du problème et montrer que α est proportionnel à la différence de potentiel U entre les deux plaques.

EXERCICE 6 : lentille convergente

Soit une lentille convergente de distance focale image $f' = 8,0$ cm.

On place à 12,0 cm à gauche de cette lentille un objet AB.

- Déterminer la position de l'image A'B' de cet objet à l'aide d'une construction géométrique à l'échelle 1/4.
- Retrouver la position $\overline{OA'}$ de l'image à l'aide de la relation de conjugaison.
- Cette image est-elle observable sur un écran ?
- Reprendre les trois questions précédentes si l'objet AB est placé cette fois à 6,0 cm à gauche de la lentille.

EXERCICE 7 : étude d'une propriété des ondes lumineuses

Un faisceau de lumière parallèle monochromatique, de longueur d'onde λ , produit par une source laser, arrive sur un fil vertical, de diamètre a (a est de l'ordre du dixième de millimètre). On place un écran à une distance D de ce fil supposée grande devant a (voir la figure 1).

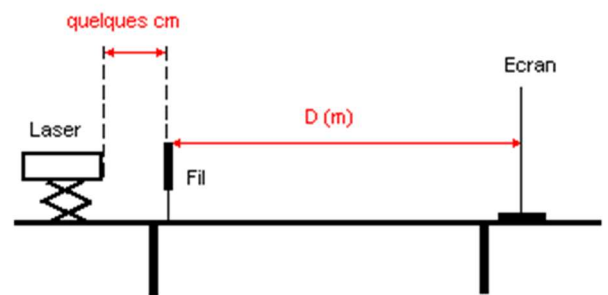


Figure 1

- La figure 2 présente l'expérience vue de dessus et la figure observée sur l'écran. Quel est le phénomène observé ? Que nous enseigne-t-il sur la nature de la lumière ?
- Faire apparaître sur la figure 2 l'écart angulaire ou demi-angle de diffraction θ et la distance D entre l'objet diffractant (le fil) et l'écran.
- En utilisant la figure 2 exprimer l'écart angulaire θ en fonction des grandeurs L et D .
- Quelle expression lie les grandeurs θ , λ et a ? Préciser les unités respectives de ces grandeurs physiques.
- En utilisant les résultats précédents, déterminer l'expression de la largeur L de la tache centrale de diffraction en fonction de λ , D et a .
- On dispose de deux fils calibrés de diamètres respectifs $a_1 = 60$ μm et $a_2 = 80$ μm . On place successivement ces deux fils verticaux dans le dispositif présenté par la figure 1. On obtient sur l'écran deux figures de diffraction distinctes notées A et B (voir la figure 3). Associer, en le justifiant, à chacun des deux fils la figure de diffraction qui lui correspond.

7. On cherche maintenant à déterminer expérimentalement la longueur d'onde dans le vide λ de la lumière monochromatique émise par la source laser utilisée. Pour cela, on place devant le faisceau laser des fils calibrés verticaux. On désigne par a le diamètre d'un fil. La figure de diffraction obtenue est observée sur un écran blanc situé à une distance $D = 2,50$ m des fils. Pour chacun des fils, on mesure la largeur L de la tâche centrale de diffraction.

On trace la courbe donnant L en fonction de $(1/a)$ (voir la figure 4). La lumière émise par la source laser est dite monochromatique. Quelle est la signification de ce terme ?

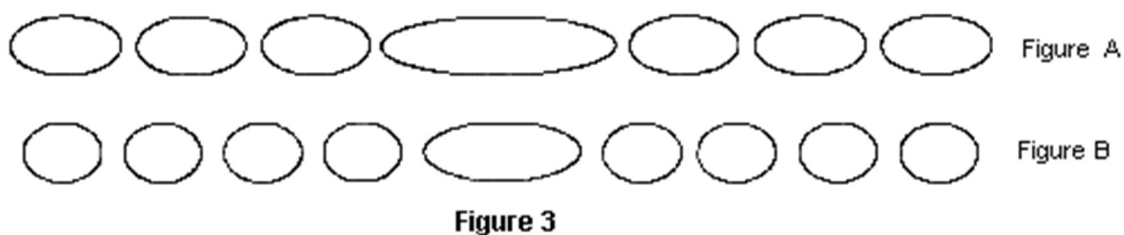
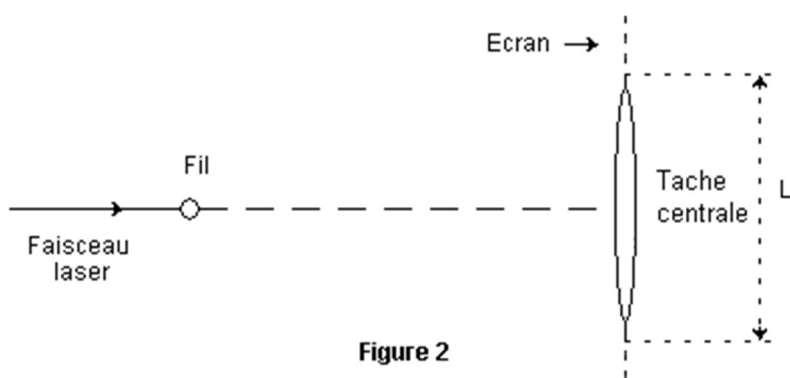
8. Montrer que l'allure de la courbe donnant L en fonction de $(1/a)$ obtenue est en accord avec l'expression de L donnée à la question 5.

9. Donner l'équation de la courbe donnant L en fonction de $(1/a)$ et en déduire la longueur d'onde λ dans le vide de la lumière monochromatique constitutive du faisceau laser utilisé.

10. Calculer la fréquence de la lumière monochromatique émise par la source laser.

11. On éclaire avec cette source laser un verre flint d'indice $n(\lambda) = 1,64$. A la traversée de ce milieu transparent dispersif, les valeurs de la fréquence f et de la longueur d'onde λ varient-elles ? Si oui, que valent-elles ?

Donnée : célérité de la lumière dans le vide ou dans l'air $c = 3,00 \times 10^8$ m.s⁻¹.



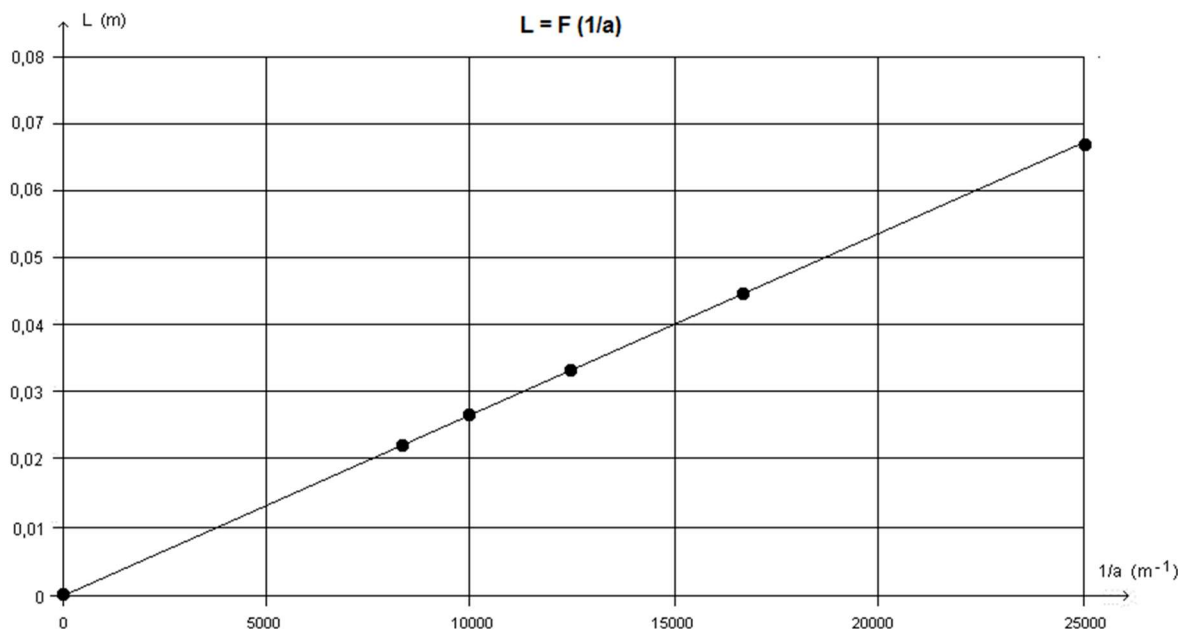
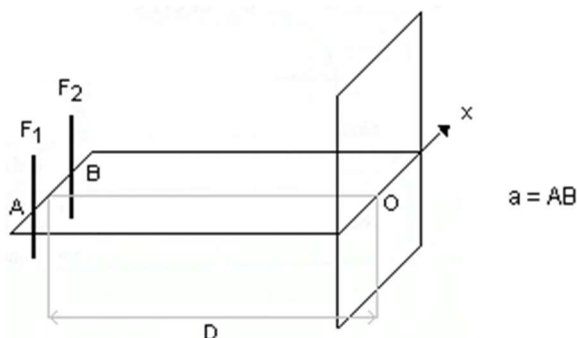


Figure 4

EXERCICE 8 : interférences

On réalise une expérience d'interférences avec une lumière monochromatique de longueur d'onde λ . On utilise une fente source avec laquelle on éclaire deux fentes verticales fines F_1 et F_2 séparées par une distance $a = AB = 0,20 \text{ mm}$. A une distance $D = 0,50 \text{ m}$ des deux fentes, on place un écran vertical permettant d'observer les interférences. On considère sur l'écran un axe horizontal Ox , le point O se trouvant sur la médiatrice de AB .



1. Expliquer qualitativement le phénomène d'interférences observé sur l'écran.
Pourquoi utilise-t-on une fente source avant les fentes F_1 et F_2 ?
2. Quelle condition doit remplir la différence de marche, notée δ , pour que l'intensité lumineuse soit nulle en un point de l'écran ?
3. Exprimer en fonction de λ , D , a et l'entier relatif k , l'abscisse x_k d'un point de l'axe pour lequel l'intensité lumineuse est nulle.
4. En déduire l'expression de l'interfrange, c'est-à-dire de l'intervalle i entre deux minima successifs en fonction de λ , D , et a .
5. On mesure $i = 1,37 \text{ mm}$. En déduire la longueur d'onde λ .

EXERCICE 9 : objet en mouvement sur un plan incliné

Un objet supposé ponctuel, de masse m , initialement fixe, est lâché sans vitesse initiale le long d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

On repère la position de l'objet par son abscisse x le long de l'axe (Ox) confondu avec le plan incliné en prenant pour origine O de l'axe sa position à l'instant initial de date $t = 0$ où on lâche l'objet.

On commence par négliger tous les frottements.

1. Appliquer la deuxième loi de Newton (loi de la quantité de mouvement) à la masse et en déduire l'expression de $\ddot{x}$ (dérivée seconde de la position que l'on note parfois x'' ou encore $\frac{d^2x}{dt^2}$)

2. Déterminer à l'aide de la question précédente l'expression de la vitesse $\dot{x}(t)$ et celle de l'équation horaire $x(t)$ donnant l'abscisse de la masse au cours du temps.

3. Quelle est la vitesse v_i atteinte par la masse lorsqu'elle atteint le point I situé sur le plan incliné à une distance L du point O ?

On pourra s'aider de la question précédente en commençant par rechercher le temps t_i au bout duquel l'objet atteint le point I situé à une distance L de O .

4. Retrouver le résultat de la question 3 à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

On tient compte à présent de la force de frottement solide entre la masse et le plan incliné (aussi appelée réaction tangentielle) et que l'on note $\vec{R}_T$. Celle-ci est colinéaire au plan, de sens opposé à la vitesse de l'objet et de norme $R_T = f R_N$ (attention l'égalité est vraie pour les normes et non pour les vecteurs car ceux-ci ne sont pas colinéaires) où R_N est la norme de la réaction normale $\vec{R}_N$ et f le coefficient de frottement.

5. Appliquer la deuxième loi de Newton à la masse et la projeter sur l'axe (Ox) confondu avec le plan incliné et sur l'axe (Oy) perpendiculaire au plan incliné.

6. Déterminer à partir de la question précédente une expression de la norme de $\vec{R}_N$, notée R_N , en fonction des données du problème puis en déduire une expression de $\|\vec{R}_T\|$.

7. Déterminer à partir des résultats des questions 5 et 6 l'expression de la vitesse $\dot{x}(t)$ et celle de l'équation horaire $x(t)$ donnant l'abscisse de la masse au cours du temps.

8. Quelle est la vitesse v'_i atteinte par la masse lorsqu'elle atteint le point I situé sur le plan incliné à une distance L du point O ?

9. Retrouver le résultat de la question 8 à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

EXERCICE 10 : chute libre d'un objet ponctuel

Cet exercice ne pourra être traité qu'une fois que vous aurez travaillé le cours d'introduction aux équations différentielles.

Un objet supposé ponctuel de masse m est lâché sans vitesse initiale depuis le point O pris pour origine de l'axe vertical (Oz) dirigé vers le bas.

Avec cette orientation de l'axe (Oz) , la vitesse s'écrit $\vec{v} = v \vec{e}_z$ et le champ de pesanteur a pour expression $\vec{g} = g \vec{e}_z$. On appelle projection du vecteur vitesse $\vec{v}$ sur l'axe (Oz) la composante v qui est une fonction du temps.

Au cours de sa chute, il est soumis au poids et à la force de frottement fluide qui s'écrit $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'objet et h le coefficient de frottement fluide qui est strictement positif.

1. Par analyse dimensionnelle, déterminer l'unité dans laquelle s'exprime le coefficient de frottement fluide h dans le système international.

2. A l'aide de la deuxième loi de Newton, déterminer l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse et en déduire celle vérifiée par la projection v en fonction des données du problème.

Au début de la chute, la vitesse v augmente, mais comme l'intensité de la force de frottement est proportionnelle à v , cette dernière n'augmente pas indéfiniment. Elle tend vers une valeur limite que l'on note v_{lim} et que l'on appelle vitesse en régime permanent.

3. Sans résoudre l'équation différentielle, déterminer l'expression de la vitesse v_{lim} en régime permanent. Pour cela, on s'appuiera sur l'équation différentielle obtenue ci-dessus et on utilisera le fait qu'en régime permanent la vitesse ne varie plus ce qui se traduit de façon simple sur sa dérivée.

4. En s'appuyant sur le cours d'introduction aux équations différentielles, montrer que la solution, qui représente l'évolution de la vitesse au cours du temps, s'écrit :

$$v(t) = v_{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Où l'on retrouve $v_{lim} = \frac{mg}{h}$ établie au 3 et avec $\tau = \frac{m}{h}$.

5. Montrer par analyse dimensionnelle que τ est homogène à un temps, autrement dit qu'il s'exprime en secondes dans le système international.

6. On souhaite donner une signification à ce temps τ qui apparaît dans l'expression de $v(t)$. Pour cela, déterminer $v(\tau)$, valeur de la vitesse après une durée τ puis déterminer $v(5\tau)$, valeur de la vitesse après une durée de 5τ , en fonction de v_{lim} . Au vu de ces résultats, comment peut-on qualifier la grandeur τ ?

EXERCICE 11 : physique et médecine 1

Un laser de puissance $P = 5,0$ mW est utilisé pour détruire une tumeur. La tumeur est détruite lorsque sa température, initialement égale à 37°C , atteint 57°C . La capacité thermique de la tumeur est égale à : $C = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ J.K}^{-1}$.

1. Rappeler la relation entre la variation de température ΔT de la tumeur (assimilée à un corps solide) et sa variation d'énergie interne ΔU . On pourra s'aider du IV.2. de la page 4 de ce document.

2. En déduire l'énergie que doit apporter le laser pour faire passer la température de la tumeur de 37°C à 57°C .

3. Déterminer la durée Δt pendant laquelle la tumeur doit être exposée au laser pour être détruite. On supposera que toute l'énergie du laser est fournie à la tumeur, sans pertes.

EXERCICE 12 : physique et médecine 2

On utilise un faisceau laser pour détruire un calcul rénal d'environ 2 cm de diamètre, de masse 4,0 g et dont 20 % de la masse est composée d'ions calcium Ca^{2+} . La lumière émise par le laser est dans le domaine Infra-Rouge avec une longueur d'onde $\lambda = 2000$ nm.

La masse molaire du calcium est égale à $M(\text{Ca}) = 40 \text{ g.mol}^{-1}$.

1. Doit-on tenir du compte du phénomène de diffraction ?

2. Quelle est l'énergie E de chacun de ces photons ?

3. Déterminer la valeur p de la quantité de mouvement des photons associés à cette onde dans le cadre d'une description corpusculaire.

4. Quel est, avec deux chiffres significatifs, le nombre N d'ions calcium présents dans le calcul rénal ?

EXERCICES DE CHIMIE

EXERCICE 13: cinétique chimique

Donnée : dans les conditions de l'expérience, le volume molaire est $V_m = 24 \text{ L.mol}^{-1}$.

1. Les solutions d'acide attaquent de nombreux métaux pour donner du dihydrogène. Ecrire l'équation-bilan de la réaction d'une solution d'acide chlorhydrique sur le zinc sachant qu'elle met en jeu les couples Zn^{2+}/Zn et H^+/H_2 .
2. Dans une première expérience, on verse sur de la grenaille de zinc (réactif en large excès) un volume de 100 mL d'une solution d'acide chlorhydrique à $0,2 \text{ mol.L}^{-1}$. On obtient les résultats suivants :

Date (s)	0	30	60	90	120	180	240	300	360
Volume H ₂ (mL)	0	63	111	149	179	212	227	236	240

Dans une seconde expérience, on verse sur de la grenaille de zinc (réactif en large excès) un volume de 200 mL d'une solution d'acide chlorhydrique à $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$. On obtient les résultats suivants :

Date (s)	0	30	60	120	180	240	300	420	540
Volume H ₂ (mL)	0	46	83	142	183	208	221	235	240

3. Compléter les deux tableaux en donnant sur une troisième ligne la quantité de matière de dihydrogène en moles et tracer sur un même graphe les deux courbes donnant cette quantité de matière en fonction de la date.
4. Quel volume de dihydrogène obtiendra-t-on, dans les deux cas, lorsque la réaction sera terminée, sachant que celle-ci est quantitative (autrement dit, elle est totale) ?
5. Quel est le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ pour chaque expérience ? Ces résultats sont-ils en accord avec la partie du cours sur les facteurs cinétiques ? Quels sont les autres facteurs cinétiques mis en évidence ici ?

EXERCICE 14 : réaction acide-base et dosage

Soit une solution commerciale S_0 d'ammoniac $\text{NH}_3(\text{aq})$ de concentration $C_0 = 1,1 \text{ mol.L}^{-1}$. On se propose d'étudier la solution S d'ammoniac 100 fois plus diluée que S_0 . Sa concentration est notée C_S .

Données : Produit ionique de l'eau : $K_e = 1,0 \cdot 10^{-14}$.

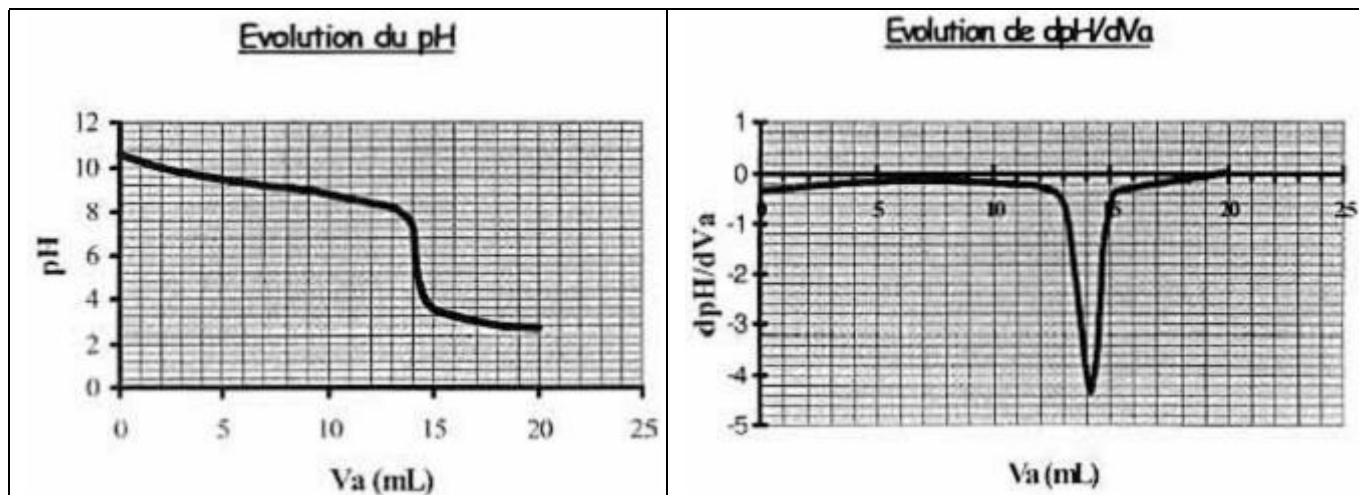
$\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}) / \text{H}_2\text{O}(\ell) : \text{p}K_{A1} = 0$ $\text{NH}_4^+(\text{aq}) / \text{NH}_3(\text{aq}) : \text{p}K_{A2} = 9,2$ $\text{H}_2\text{O}(\ell) / \text{HO}^-(\text{aq}) : \text{p}K_{A3} = 14$

-Conductivités molaires ioniques: $\lambda(\text{HO}^-(\text{aq})) = 199 \cdot 10^{-4} \text{ S.m}^2.\text{mol}^{-1}$; $\lambda(\text{NH}_4^+(\text{aq})) = 73,4 \cdot 10^{-4} \text{ S.m}^2.\text{mol}^{-1}$.

1. Comment préparer précisément un volume $V = 1,00 \text{ L}$ de S à partir de S_0 ?

On se propose de vérifier la valeur de la concentration C_0 de S_0 . Pour cela, la solution S est titrée par une solution d'acide chlorhydrique de concentration $C_a = 0,015 \text{ mol.L}^{-1}$.

Dans un volume $V_S = 20 \text{ mL}$ de la solution S , on verse progressivement la solution d'acide chlorhydrique et on mesure après chaque ajout le pH du mélange. On peut alors tracer la courbe d'évolution du pH en fonction du volume de solution acide ajoutée V_a à l'aide d'un logiciel approprié. On trace aussi la courbe d'évolution de la dérivée $\frac{dpH}{dV_a}$ en fonction de V_a .



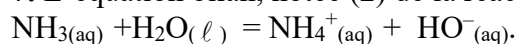
2. Écrire l'équation bilan de la réaction de titrage (1) de la solution d'ammoniac S.
 3. A partir des données expérimentales, déterminer le volume de solution acide versé à l'équivalence V_{aE} .
 4. En déduire la valeur de la concentration C_S de la solution diluée S.
 5. Déterminer alors la valeur de la concentration C_0 de la solution S_0 et comparer la valeur trouvée à la valeur C_0 donnée au début de l'énoncé.
- Remarque : Pour la suite de l'exercice, on utilisera la valeur de C_0 donnée au début de l'énoncé et la valeur correspondante de C_S .
6. Autre repérage de l'équivalence.

Parmi les indicateurs colorés du tableau ci-dessous, déterminer celui qu'il faut ajouter à la solution pour procéder le plus efficacement possible au titrage précédent par une méthode colorimétrique.

Indicateur coloré	Teinte acide	Zone de virage	Teinte basique
Bleu de bromophénol	Jaune	3,0 – 4,6	Bleu-violet
Rouge de méthyle	Rouge	4,2 – 6,2	Jaune
Rouge de crésol	Jaune	7,2 – 8,8	Rouge

On considère à présent un volume $U_S = 1,0$ L de la solution S.

7. L'équation bilan, notée (2) de la réaction entre l'ammoniac et l'eau est :



On définit la constante d'équilibre K associée à cette réaction par le rapport :

$$K = \frac{[\text{NH}_4^+][\text{HO}^-]}{[\text{NH}_3]}$$

Exprimer K en fonction de K_e et K_{A2} . Calculer K .

8. Construire un tableau d'avancement associé à la réaction (2).

Remarques :

A l'état initial, $[\text{NH}_3(\text{aq})]_i = C_S$ (concentration de la solution S). L'avancement à l'état final d'équilibre est noté x_{eq} . Le volume de la solution U_S est supposé constant (la dilution est négligée).

9. En supposant que x_{eq} est négligeable par rapport au produit $C_S \cdot U_S$, montrer que : $K \approx \frac{x_{\text{eq}}^2}{C_S U_S^2}$

10. En déduire la valeur x_{eq} . L'hypothèse est-elle justifiée ?

11. La valeur de la conductivité de la solution diluée S est $\sigma = 8,52 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

12. En déduire la valeur commune de la concentration (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) des ions $\text{NH}_4^+(\text{aq})$ et $\text{HO}^-(\text{aq})$ dans S.

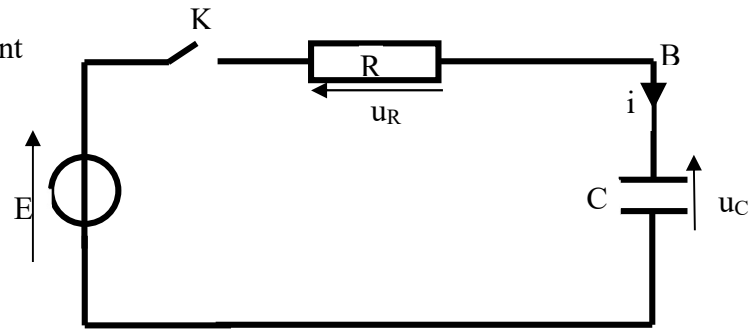
13. Déterminer alors la valeur du pH dans S. Ce résultat est-il en accord avec les données expérimentales ?

Si vous avez terminé ces travaux d'été et que vous souhaitez vous entraîner davantage, n'hésitez pas à me contacter. Je vous enverrai notamment la première partie d'un sujet du Concours Général qui est un bon exercice d'entraînement à l'entrée en CPGE.

Révision : équations différentielles en électricité

Le condensateur de capacité C est initialement déchargé.

A l'instant initial, de date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . L'ensemble en série condensateur de capacité C + conducteur ohmique de résistance R se retrouve alors aux bornes d'une source idéale de tension de force électromotrice E .



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.
2. Déterminer la condition initiale sur la tension $u_C(t)$ c'est-à-dire la valeur $u_C(0)$ de la tension à l'instant initial.
3. Résoudre cette équation différentielle en tenant compte de la condition initiale.
4. On pose $\tau = RC$. Montrer par analyse dimensionnelle que τ est homogène à un temps et expliquer ce qu'il représente physiquement.
5. Tracer l'allure de la fonction $u_C(t)$
6. Que vaut la tension $u_C(\tau)$ à l'instant de date τ ? En déduire une méthode graphique de détermination du temps caractéristique τ . Connaissez-vous une autre méthode de détermination graphique de τ ?

TEST DE CALCUL

Ce test est destiné à évaluer votre aisance en calcul, composante essentielle en classe préparatoire, que ce soit en mathématiques, en physique, en chimie ou en sciences industrielles.

Faites ce test en deux heures, sans vous aider d'une calculatrice ou de rappels de cours.

Si vous détectez des difficultés dans certains domaines, il est essentiel que vous vous entraîniez au cours de l'été.

Voici quelques sites dont les ressources sont gratuites et qui pourront vous être utiles dans ce travail de consolidation :

KHAN ACADEMY :

https://fr.khanacademy.org/math?gclid=CjwKCAjw5NqVBhAjEiwAeCa97QOmp36AMqP_G3hfVkfVKtrGdcSOs1bw_pB_uYASsYJ2voTnk--95xoCGVoQAvD_BwE

KWYK : <https://www.kwyk.fr/exercices/libres/mathematiques/>

CMATH : <https://www.cmath.fr/1ere/suites/exercice3.php>

JEUXMATHS : <https://www.jeuxmaths.fr/exercice-de-math-equationtangente.html>

TOUPTY : <https://www.toupty.com/exercice-math-lycee.html>

MATHS ET TIQUES (site d'Yvan Monka) : <https://www.maths-et-tiques.fr/>

L'équipe enseignante des classes de PCSI et MPSI

MANIPULATION D'EXPRESSIONS LITTERALES

Exercice 1

On donne :

$$A = \frac{\frac{6(p+1)}{p(p-1)(2p-2)}}{\frac{2p+2}{p^2(p-1)^2}} \text{ où } p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$$

Mettre A sous la forme d'une seule fraction écrite le plus simplement possible.

Exercice 2

On donne la relation suivante où v est un réel positif :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$$

Déterminer l'expression de v en fonction de m, g, z et E .

Exercice 3

On donne la relation suivante où p, q et f sont des réels non nuls :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Donner l'expression de q en fonction de p et de f .

Exercice 4

On donne la relation entre x réel, n réel inférieur à 2 et p entier supérieur ou égal à 1 :

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{n}{p+1} \sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$$

Déterminer l'expression de x en fonction de n et p .

DERIVEE D'UNE FONCTION COMPOSEE

Exercice 5

Soit la fonction $f: x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ définie sur $[0; +\infty[$.

Détermine l'expression de la dérivée f' de cette fonction par rapport à la variable x .

Exercice 6

Soit la fonction $g: x \mapsto g(x) = n\sqrt{x^2 + D^2} + p\sqrt{(L-x)^2 + d^2}$ pour $x \in [0; L]$ où n, p, L, d et D sont des constantes positives.

Déterminer l'expression de la dérivée g' de cette fonction par rapport à la variable x .

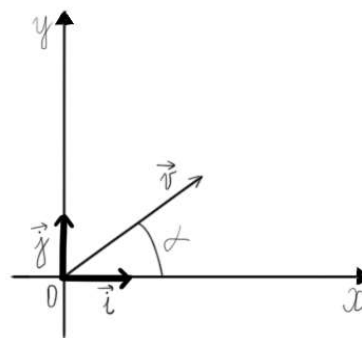
VECTEURS

Exercice 7

Dans un plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère le vecteur $\vec{v}$ dont la norme est notée $\|\vec{v}\|$ et faisant un angle α avec l'axe (Ox) orienté par le vecteur de base $\vec{i}$ comme représenté ci-contre.

On note v_x et v_y les composantes du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

Déterminer l'expression de v_x et celle de v_y en fonction de $\|\vec{v}\|$ et de α .



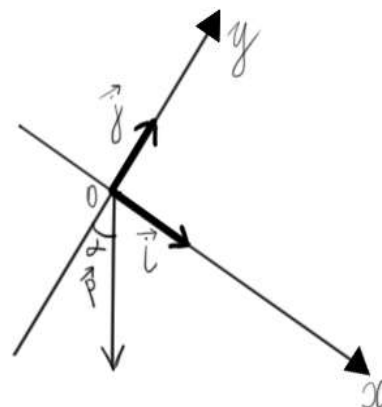
Exercice 8

Dans un plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère le vecteur $\vec{P}$ dont la norme est notée $\|\vec{P}\|$ et orienté comme représenté ci-contre.

On note P_x et P_y les composantes du vecteur $\vec{P}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j}$$

Déterminer l'expression de P_x et celle de P_y en fonction de $\|\vec{P}\|$ et de α .



FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ exprimé en radians :

- $\sin(x) = 1$
- $\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sin(2x) = \cos(3x)$

On rappelle :

angle θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

NOMBRES COMPLEXES

LES NOMBRES COMPLEXES SONT AU PROGRAMME DE « MATHS EXPERTES »

Exercice 10

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle avec un argument appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = 3 - \sqrt{3}i$$

On donne :

angle θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Exercice 11

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants.

$$z_3 = \frac{3 - 4i}{2 + 2i}$$

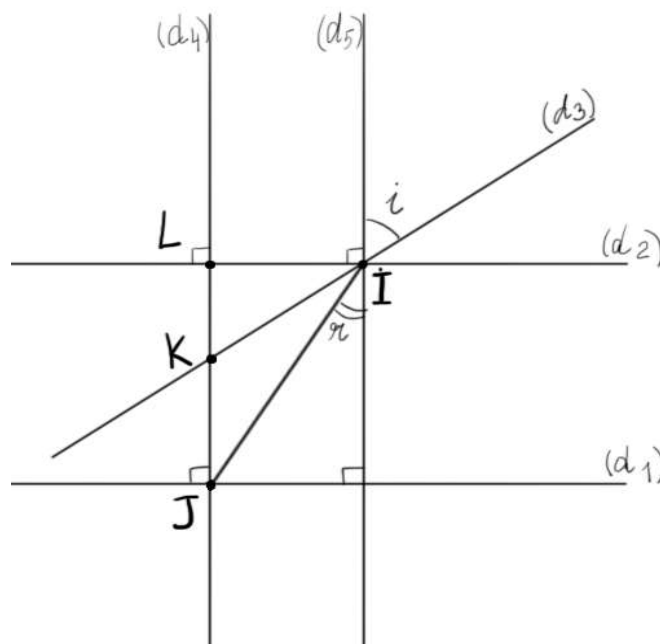
$$z_4 = 1 + \frac{5}{6 + 8i}$$

DETERMINATION D'ANGLES ET DE LONGUEURS

Exercice 12

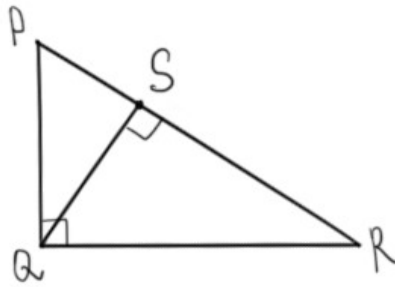
Sachant que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, que les droites (d_4) et (d_5) sont perpendiculaires à (d_1) et (d_2) , et que les angles i et r sont donnés :

- Déterminer l'expression des angles $\widehat{LIJ}$, $\widehat{LKI}$, $\widehat{LJI}$ et $\widehat{JKI}$
- Exprimer la longueur LI en fonction de la longueur LK et de l'angle i
- Exprimer la longueur LI en fonction de la longueur LJ et de l'angle r
- En déduire une relation entre la longueur LK , l'angle i , la longueur LJ et l'angle r



Exercice 13

Le triangle PQR est rectangle en Q. Le segment $[QS]$ est perpendiculaire au segment $[PR]$.
Exprimer la longueur QS en fonction des longueurs QP , QR et PR .



Exercice 14

On considère le triangle ABC dont les côtés AC et AB mesurent respectivement 10 cm et 8 cm.
Sachant que l'angle $\hat{A}$ est égale à $\frac{\pi}{3}$, déterminer, au dixième près, la longueur du côté BC en cm.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 15

Déterminer la fonction $f : x \mapsto f(x)$ qui vérifie $f(0) = 2$ qui est solution de l'équation différentielle :

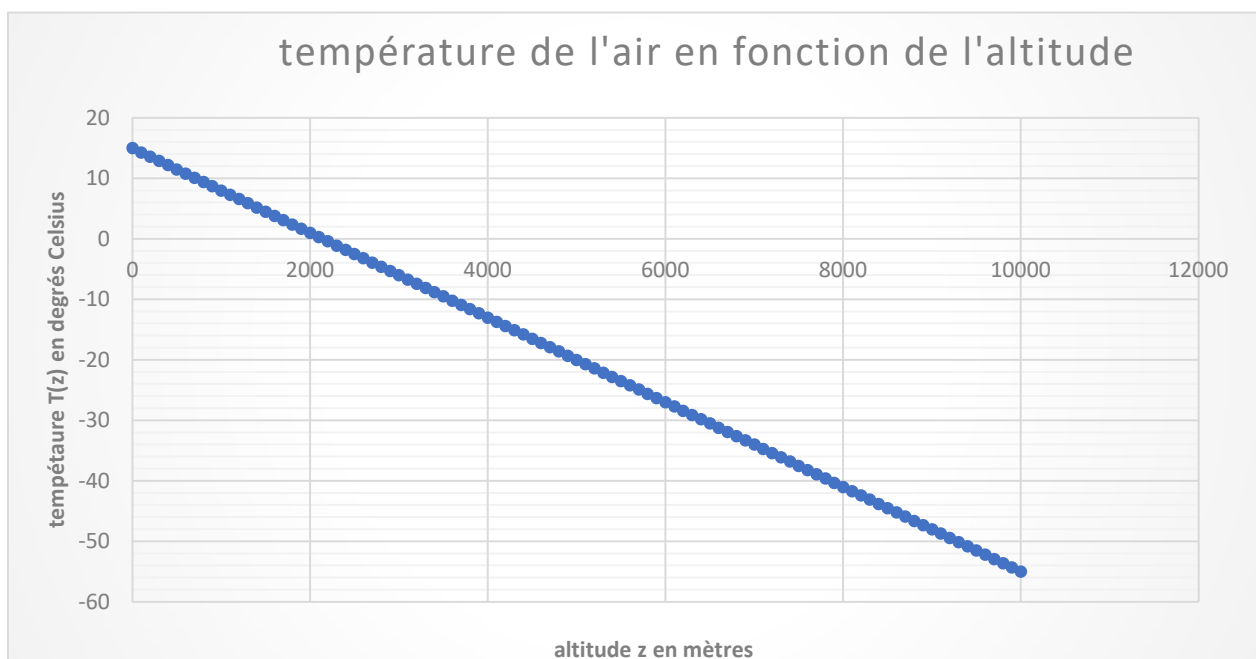
$$f' + 2f = 3$$

EQUATIONS DE DROITES

Exercice 16

La droite ci-dessous représente la variation de la température $T(z)$ de l'air pour une altitude z comprise entre 0 et 10000 mètres.

Déterminer l'équation de cette droite.



Exercice 17

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère le point A de coordonnées (2; 3) et le vecteur $\vec{u} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$.

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par le point A et orthogonale au vecteur $\vec{u}$.

CALCUL D'INTEGRALES

Exercice 18

Calculez les intégrales suivantes :

- a. $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx$
- b. $I_2 = \int_3^5 \frac{2}{x} \, dx$
- c. $I_3 = \int_1^3 (2 + 3x) \, dx$
- d. $I_4 = \int_0^1 x e^x \, dx$ Indice : pour calculer I_4 on effectuera une intégration par parties.

LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Exercice 19

En utilisant une propriété du logarithme népérien mettre les expressions ci-dessous sous la forme la plus simple possible d'un seul logarithme népérien ou d'un nombre, selon les cas :

- a. $A = 3 \ln(a) + 4 \ln(b)$
- b. $B = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
- c. $C = -e^{-\ln(\frac{1}{2})}$
- d. $D = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

CONVERSIONS

Exercice 20

Effectuer les conversions ci-dessous. Vous exprimerez le résultat en écriture scientifique.

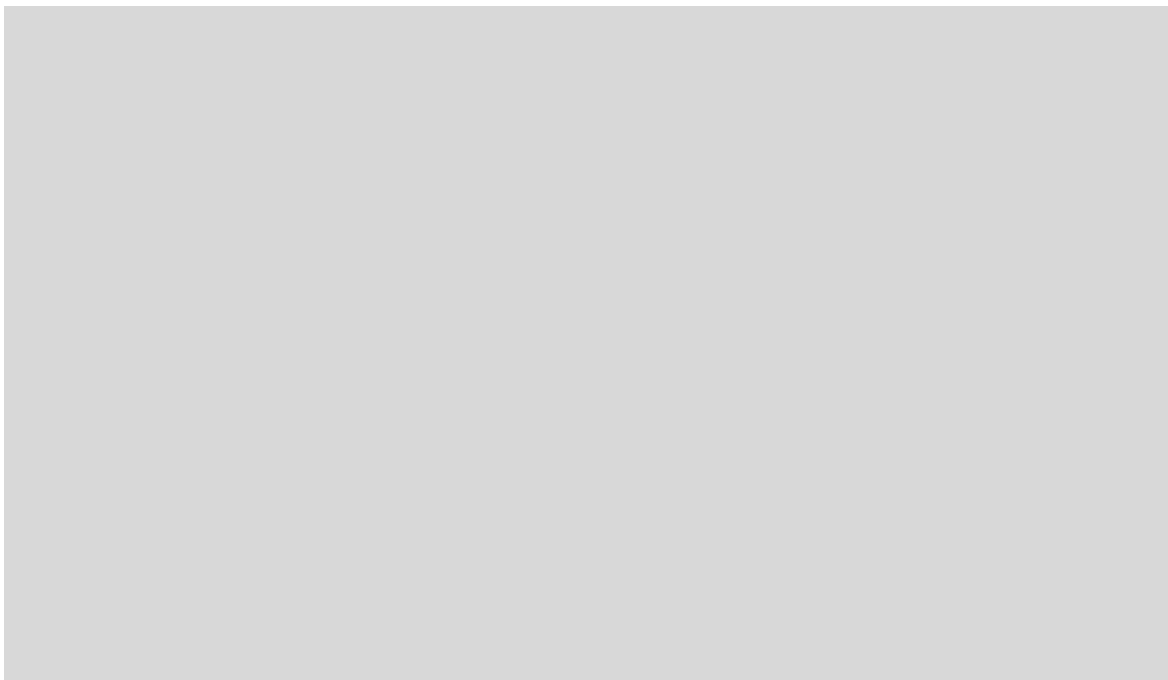
- a. $23 \, mL = \quad m^3$
- b. $0,45 \, kg = \quad mg$
- c. $2,1 \, g \cdot cm^{-3} = \quad kg \cdot m^{-3}$
- d. $0,80 \, kg \cdot L^{-1} = \quad g \cdot cm^{-3}$

CHAPITRE 1: FORCES ET DEUXIEME LOI DE NEWTON

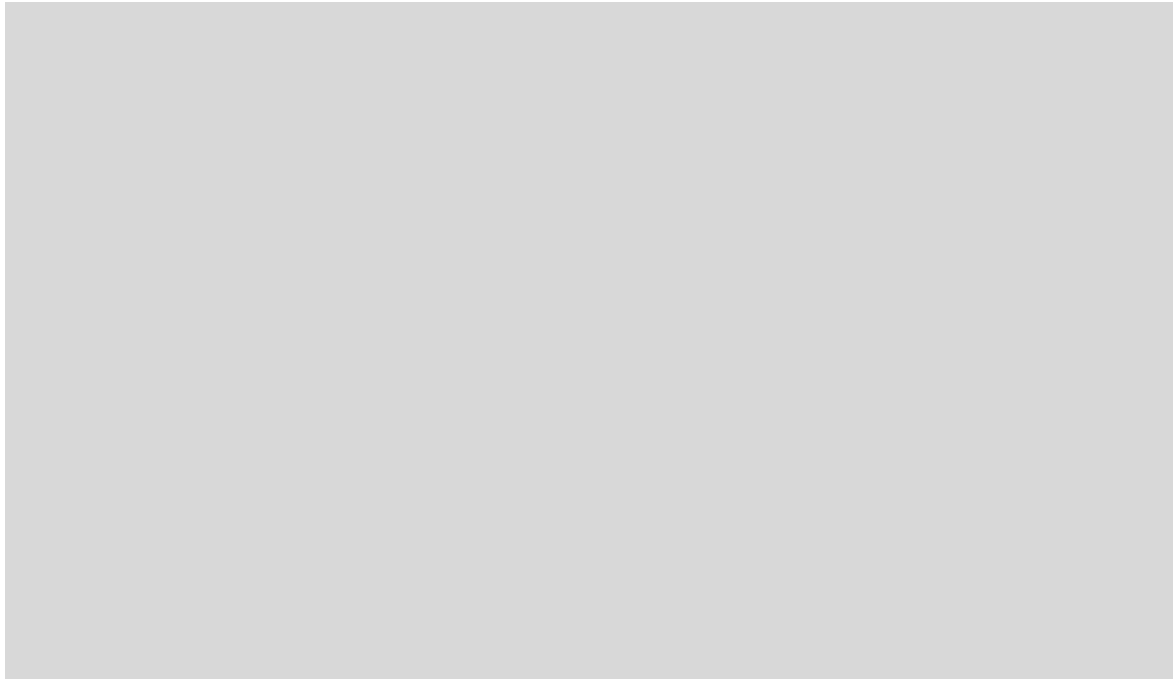
<https://www.youtube.com/watch?v=-Syi3TuSUUs>



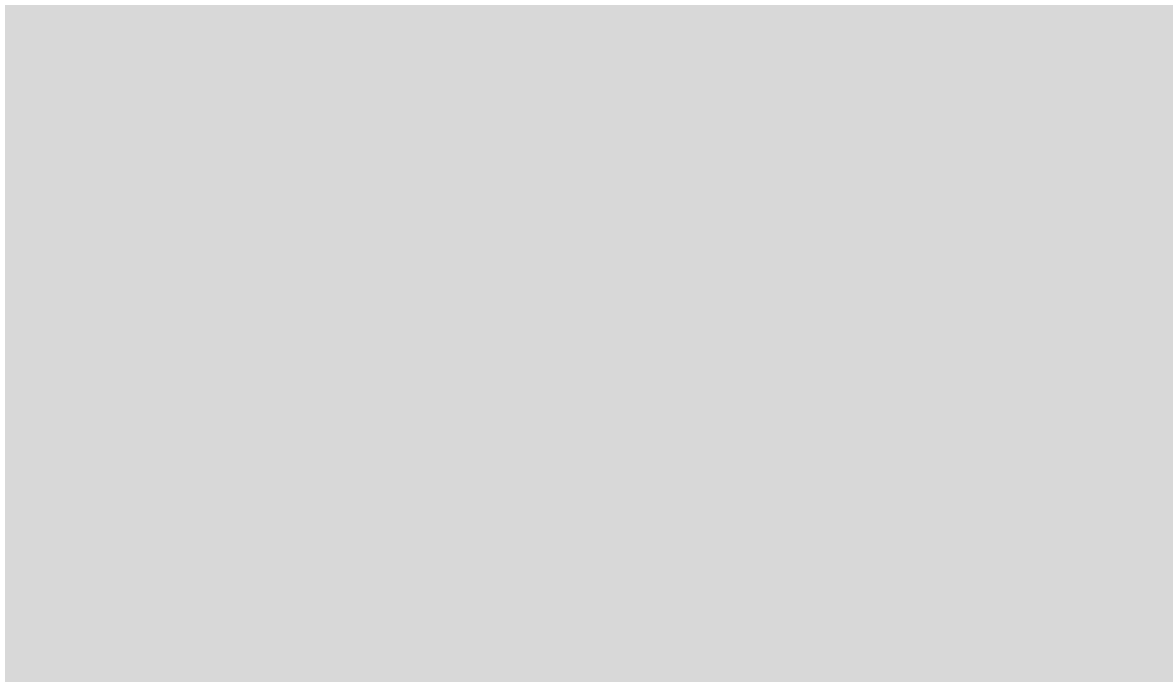
<https://www.youtube.com/watch?v=C14QHVo6nk>



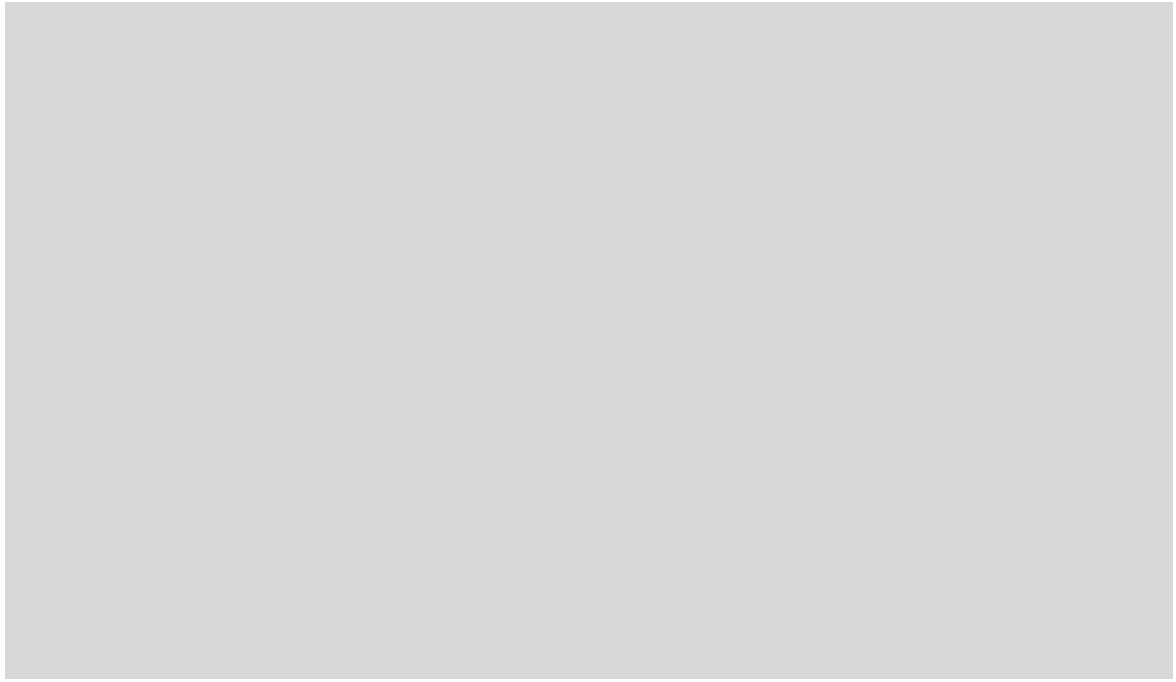
<https://www.youtube.com/watch?v=Y8ALZKRIMbM>



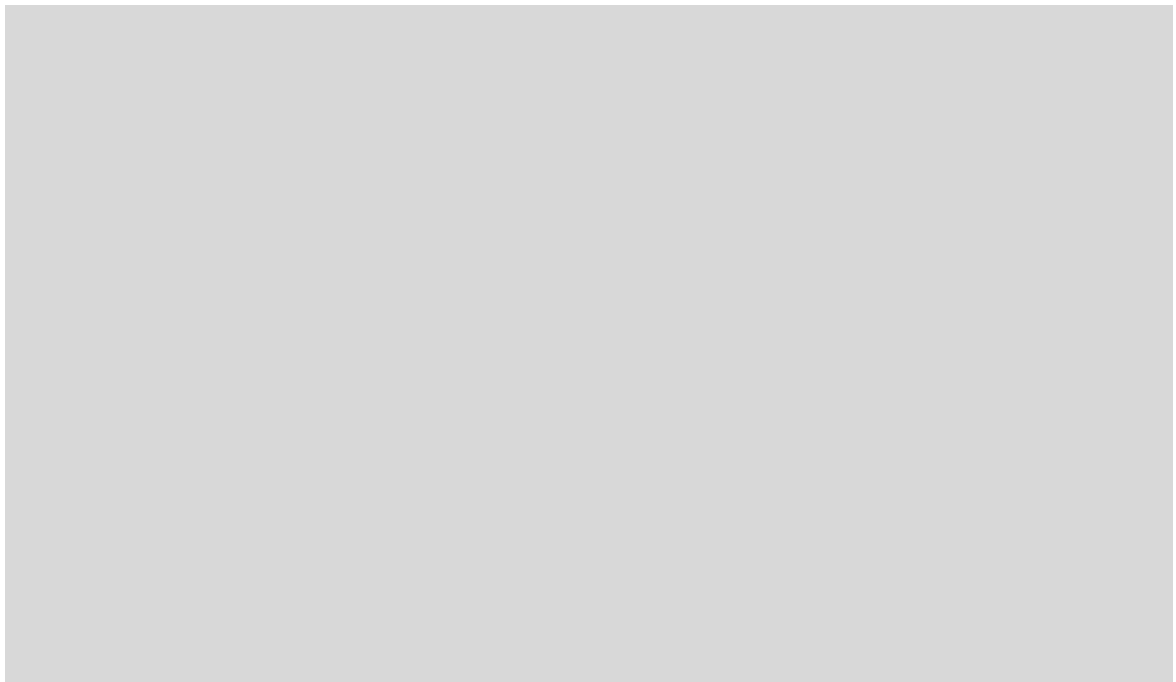
<https://www.youtube.com/watch?v=6plZzgZcoNs>



<https://www.youtube.com/watch?v=1tZzdT-TzY8>



<https://www.youtube.com/watch?v=75c0NsRS-cg>

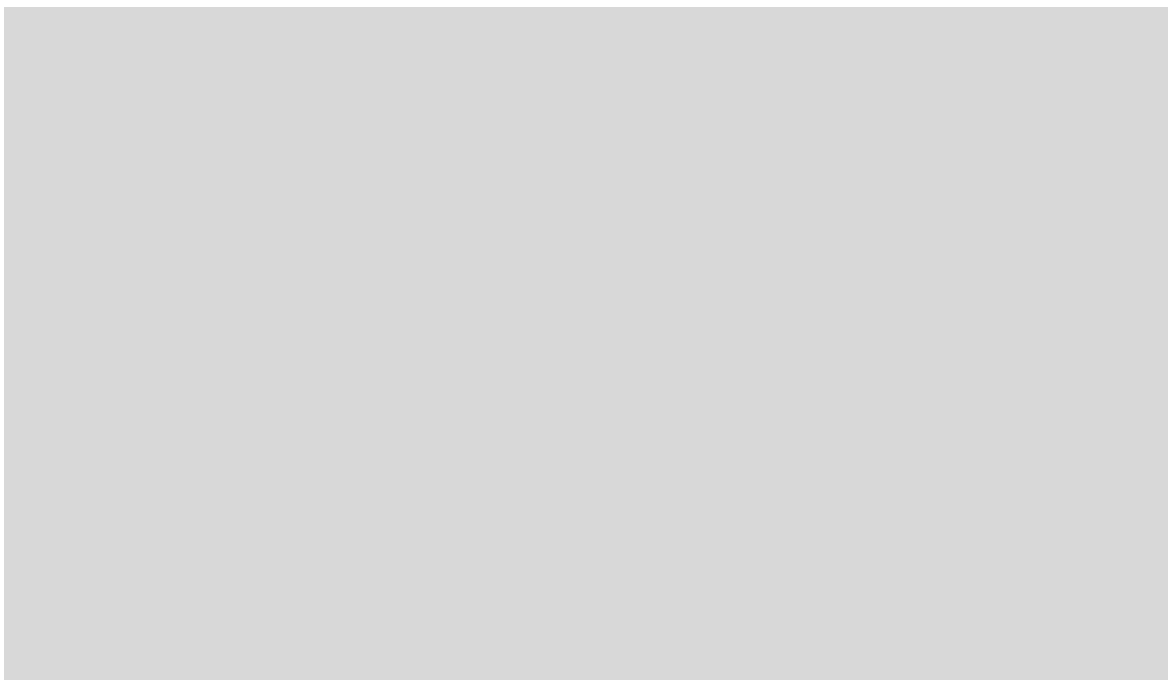


CHAPITRE 2 : APPROCHE ENERGETIQUE

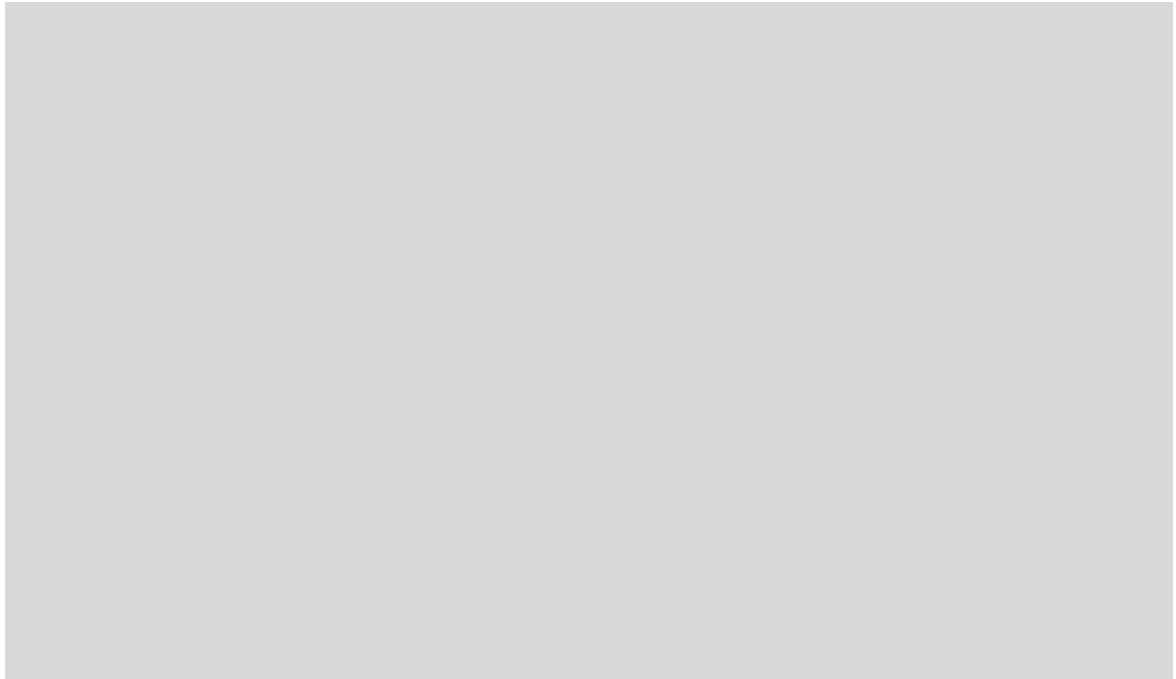
<https://www.youtube.com/watch?v=t7kQ1F56RnA>



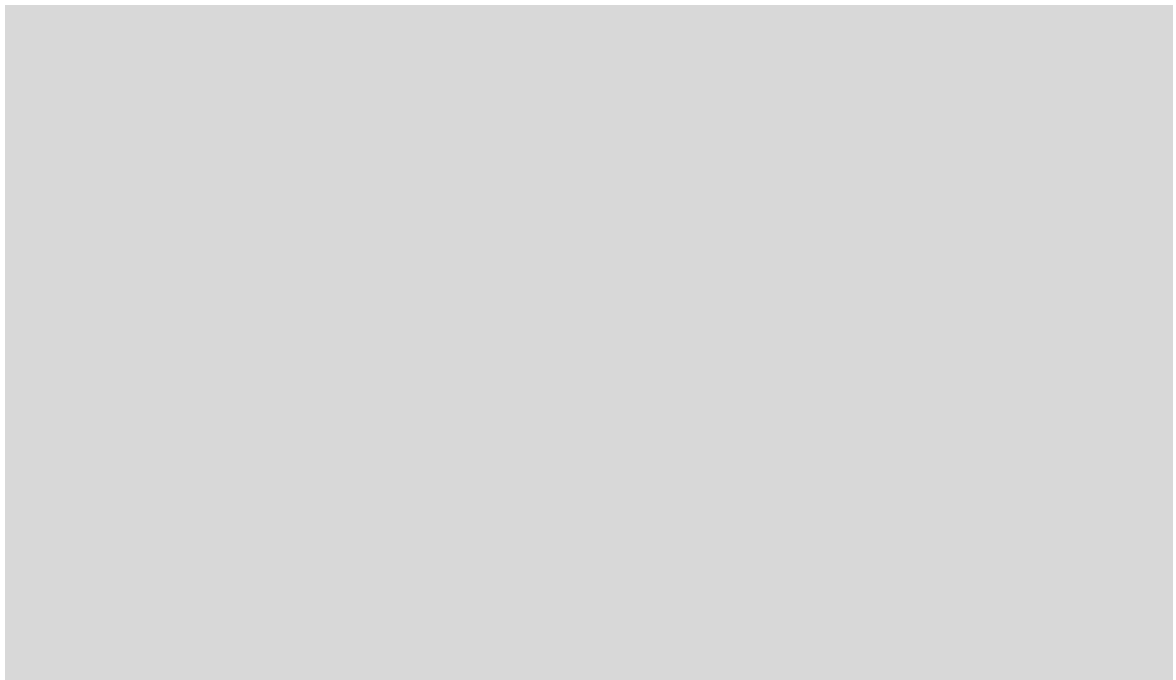
<https://www.youtube.com/watch?v=1BKpyCVUixk>



<https://www.youtube.com/watch?v=6ZsLQveLQOQ>



<https://www.youtube.com/watch?v=ltpr8a0Qzok>

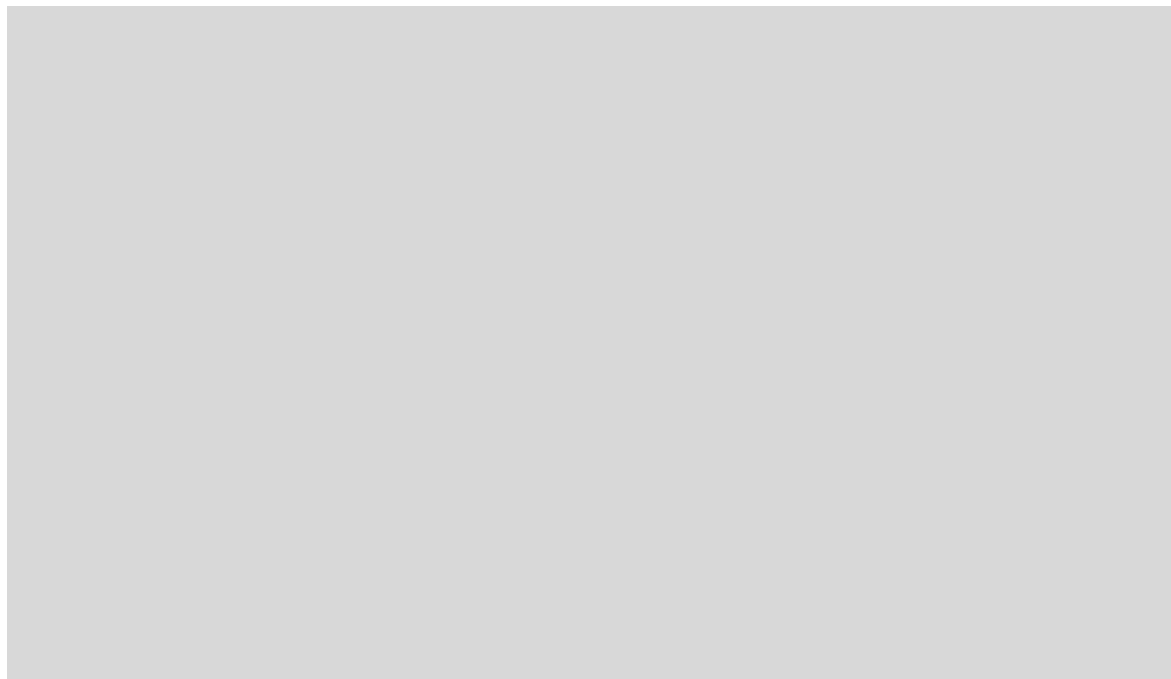


<https://www.youtube.com/watch?v=eOsWvmCdwi4>



L'INTEGRALE EN PHYSIQUE

<https://www.youtube.com/watch?v=dAGG0WjHCos>



<https://www.youtube.com/watch?v=TtK9eebGOel>



Travail d'été en mathématiques – MPSI Stanislas Cannes

Vous venez d'être admis(e) en MPSI, félicitations !

Le programme de mathématiques qui vous attend à la rentrée se place dans la lignée du programme de la spécialité Maths et de l'option maths expertes du lycée, en reprenant tous les thèmes mais néanmoins en se limitant pour ce qui concerne les probabilités à des univers finis.

La première moitié de l'année sera consacrée à de larges approfondissements des notions abordées au lycée, en y ajoutant une exigence bien supérieure en termes de raisonnement, rigueur et calculs. A ce propos, sachez que la calculatrice sera d'un usage limité en MPSI. Cela ne signifie pas que vous devez vous en séparer car vous en aurez encore besoin, mais qu'il vous faut au plus vite, si nécessaire, apprendre à l'utiliser uniquement dans les situations où son aide est indispensable (c'est à dire pas pour calculer 13×8 , tracer le graphe de la fonction exponentielle ni déterminer une approximation à 1 décimale de $\sqrt{2}$...).

Le travail de vacances en mathématiques s'organise autour de 3 axes :

1) Parfaite maîtrise du programme de mathématiques du lycée

La quasi-totalité de votre programme de Terminale vous sera utile pour la rentrée. Il constitue la base de l'enseignement de la prépa mais les vraies difficultés de la MPSI se situent ailleurs : **rythme élevé, exigence de raisonnement rigoureux, travail du cours approfondi**. Une mauvaise maîtrise des notions du lycée peut très vite vous handicaper.

Il est donc très important de bien maîtriser les programmes de Terminale, des spécialités maths ainsi que des « maths expertes ». *J'insiste sur le fait que si certains d'entre vous n'ont pas suivi l'option maths expertes, il faut profiter de l'été pour se mettre à niveau.*

Si vous constatez des lacunes sur certaines parties du programme, n'hésitez pas à aller vous entraîner via ce lien : <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>

2) Travail des réflexes et des techniques de calculs

Afin de vous "muscler" en calcul et de travailler vos réflexes, je vous demande de **travailler en autonomie les fiches n° 1 à 12, et la fiche n°16 de l'ouvrage :**

Cahier de calcul en maths, Colas Bardavid et al., Éditions Dunod,

disponible sur ce lien : <https://cahier-de-prepa.fr/pc-bdb/download?id=4>

Ce travail peut vous paraître « anodin », voire « facile », pourtant je vous assure que chaque année, des étudiants sont en difficulté à cause de lacunes calculatoires.

3) Étude des premiers chapitres de MPSI

Vous trouverez dans les pages qui suivent, les quatre premiers chapitres de l'année. Je vous demande, dans la mesure du possible, de lire ces documents et de chercher autant que possible les exemples et exercices figurant dans le cours. *Si vous ne trouvez pas tous les exercices, ce n'est pas grave, nous reprendrons cela ensemble à la rentrée.*

Évaluation du travail d'été :

- Un devoir sera donné le jour de la rentrée, il pourra porter sur les notions de lycée et les techniques de calculs.

Pour toute question, vous pouvez me contacter par mail : arabeisen-hurteaux@stanislas-cannes.com

Bon travail et bonnes vacances !
Amélie RABEISEN HURTEAUX

Chapitre 1 : Logique et raisonnements mathématiques

I Quantificateurs

Définition 1.1

- Le symbole $\forall$ signifie « pour tout » ou « quel que soit ».
- Le symbole $\exists$ signifie « il existe ».
- Le symbole $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

Exercice 1. Ecrire « en français » les phrases suivantes.

1. « $\forall x \in [1, +\infty[, x^2 \geq 1$ ».
2. « $\exists n \in \mathbb{N}, n > 100$ ».
3. « $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 = 0$ ».

Remarque 1.2 : La virgule qui suit un quantificateur $\exists$ se traduit par : "tel que".

Exercice 2. Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes.

1. « Quel que soit l'entier naturel n , n^2 est supérieur ou égal à n ».
2. « Il existe un unique entier naturel n tel que $\frac{n(n+1)}{2}$ soit égal à 2 ».

II Propositions

Définition 2.1

Une **proposition** est une phrase mathématique à laquelle il est possible d'attribuer une valeur de vérité **vraie** ou **fausse**. Une **table de vérité** consigne ces deux possibilités.

$\mathcal{P}$
V
F

Remarque 2.2 : L'énoncé d'une proposition $\mathcal{P}$ peut dépendre d'une variable x , on la notera alors : $\mathcal{P}(x)$.

Exemple 2.3 : $\mathcal{P}$: « $2 \geq 0$ » est une proposition vraie et $\mathcal{Q}$: « $7 \times 2 = 10$ » est une proposition fausse.

Attention : La proposition $\mathcal{P}(x) : x \geq 0$ ne peut pas être directement identifiée comme vraie ou fausse, car cela dépend de la valeur de x . Pour qu'elle soit complète, il faut préciser quelles valeurs de x on considère et donc faire appel aux quantificateurs.

Exemple 2.4 :

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est une proposition complète. Elle est vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ est une proposition complète. Elle est fausse.

Remarque 2.5 : Une proposition peut dépendre de deux variables (ou plus), on note alors $\mathcal{P}(x, y)$. Il faut alors faire **attention à la manipulation des quantificateurs**.

Exemple 2.6 : La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$ » est vraie (tout nombre réel peut-être compris entre deux entiers) tandis que « $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n + 1$ » est fausse. On remarque donc que chaque nombre réel x est compris entre deux entiers consécutifs : n et $n + 1$. Ce nombre n est appelé **partie entière** de x et noté $\lfloor x \rfloor$ ou parfois $E(x)$.

Retenir

L'ordre des quantificateurs est important !

Prouver la véracité d'une proposition peut-être fait **par une démonstration**.

III Connecteurs logiques

Considérons maintenant deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. On va construire des nouvelles propositions dont la valeur de vérité va dépendre des valeurs de vérité de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

III. A Négation d'une proposition

Définition 3.1

La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée $\text{Non } \mathcal{P}$ et appelée **négation** de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie quand $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie. Lorsqu'on écrit $\neg P$, on lit "non P",

Cette proposition est définie par la table de vérité :

$\mathcal{P}$	non $\mathcal{P}$
V	F
F	V

Exemple 3.2 : Si $\mathcal{P}$ est la proposition « $2 \leq 3$ ». Alors $\text{Non } \mathcal{P}$ est la proposition $2 > 3$. La négation de "je mesure 1,70m ou plus" est "je mesure strictement moins de 1,70 m".

Exercice 3. Quelle est la négation de la proposition : "Tous les élèves de cette classe font d'un instrument"? Celle de la proposition "il existe un élève de prépa qui mesure strictement moins d'un mètre" ?

Méthode 3.3

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ une proposition.

1. La négation de $(\forall x \in E, \mathcal{P}(x))$ est $(\exists x \in E, \text{Non } \mathcal{P}(x))$.

Autrement dit, **pour nier le fait qu'une proposition est vraie pour tous les éléments d'un ensemble, il suffit de trouver un élément qui ne vérifie pas cette propriété.**

2. La négation de $(\exists x \in E, \mathcal{P}(x))$ est $(\forall x \in E, \text{Non } \mathcal{P}(x))$.

Autrement dit, **nier le fait qu'il existe un élément d'un ensemble vérifiant une proposition, c'est dire que tous les éléments de cet ensemble ne vérifient pas cette propriété.**

Exercice 4.

1. Quelle est la proposition contraire de « $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 - 1 \geq 0$ » ?
2. Quelle est la proposition contraire de « $\exists n \in \mathbb{N}, 2^n = n + 1$ » ?

Remarque 3.4 : Considérons une proposition qui nous dit que $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$, où E est un ensemble. Le premier point de la méthode précédente permet de dire que pour mettre en défaut cette proposition, pour montrer qu'elle est fausse, il suffit de trouver un **contre-exemple**, c'est à dire un élément x de E pour lequel $\mathcal{P}(x)$ est fausse.

Exercice 5. Montrer que la proposition « $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq n + 1$ » est fausse.

III. B Conjonctions et disjonctions de propositions

Définition 3.5

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La proposition **disjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$ ou encore $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$, est la proposition qui est vraie si l'une des propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie et qui est fausse si ces deux propositions sont fausses.
- La proposition **conjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$ ou encore $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$, est la proposition qui est vraie si les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies et qui est fausse si l'une de ces deux propositions est fausse.

Exemple 3.6 : On lance un dé à 6 faces, et considère les propositions $\mathcal{P}$: "le résultat est pair", et $\mathcal{Q}$: "le résultat est supérieur ou égal à 3". Alors $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$ est la proposition "le résultat est 2,3,4,5 ou 6", et la proposition $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$ est "le résultat est 4 ou 6".

Exercice 6. Dresser la table de vérité des propositions $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$.

III. C Implication et équivalence

Définition 3.7

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- On dit que $\mathcal{P}$ **implique** $\mathcal{Q}$ et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, ou encore $\neg \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ si lorsque $\mathcal{P}$ est vraie alors $\mathcal{Q}$ est vraie.
- Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** pour $\mathcal{P}$.
- L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée **réciroque** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Exercice 7. « $\forall x \in \mathbb{R}, x = x^2 \Rightarrow x \geq 0$ » est une proposition vraie. La condition suffisante est " $x = x^2$ ", la condition nécessaire est " $x \geq 0$ ". L'implication réciroque est-elle vraie ?

Remarque 3.8 : Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On considère la proposition $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. Cela veut donc dire, "si on a $\mathcal{P}$, alors on a $\mathcal{Q}$ ". La négation de $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est $(\mathcal{P} \text{ et Non } \mathcal{Q})$. Pour vous en persuader, vérifiez-le avec des tables de vérité de $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et de $(\mathcal{P} \text{ et Non } \mathcal{Q})$.

Exercice 8. Quelle est la négation de "Je suis en prépa donc je travaille beaucoup" ?

Exercice 9. Écrire la table de vérité de $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et celle de $\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.

Définition 3.9

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont **équivalentes**, et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ si on a $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire : Dire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, c'est dire que $\mathcal{P}$ est vraie **si, et seulement si** $\mathcal{Q}$ est vraie, ou encore que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** de $\mathcal{Q}$.

Exemple 3.10 : $\forall x \in [0, +\infty[, x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ est vraie.

Attention : Il faut toujours faire attention à l'ensemble des valeurs de x considérées. L'équivalence $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ est fausse.

Exercice 10. Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1. $x = 1$ $x^2 = 1$.
2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2 et $u_0 = 5$ $u_3 = 11$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$.

Remarque 3.11 : Une équivalence peut être montrée par double implication, c'est à dire condition nécessaire et condition suffisante.

Exercice 11. Soient deux réels a et b . Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$

IV Exemples de raisonnement

IV. A Raisonnement déductif

Méthode 4.1

Dans beaucoup de cas, on prouve une proposition par un **raisonnement direct** : on part de l'hypothèse, on arrive à la conclusion par une succession d'implications reliées les unes aux autres.

Exercice 12. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[, (3x + 2)^2 + 5x - 5 \geq 0$.

Remarque 4.2 : Souvent, on démontre une implication de la forme $A \Rightarrow B$ à l'aide de deux implications de la forme : $A \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow B$.

Par exemple, le syllogisme bien connu :

Socrate est un homme.
Tout homme est mortel.
Socrate est mortel.

Si vous allez rencontrer une telle situation bien souvent, c'est parce que vous avez à disposition dans votre cours des théorèmes... Supposons que vous vouliez démontrer que $A \Rightarrow B$ et que vous connaissiez un théorème de la forme $C \Rightarrow B$. Alors vous n'aurez qu'à vérifier $A \Rightarrow C$ puis citer le théorème $C \Rightarrow B$ pour en déduire $A \Rightarrow B$.

Exercice 13. Montrer que tout nombre divisible par 3 a la somme de ses chiffres divisible par 3.

IV. B Montrer une implication par contraposée

Méthode 4.3

Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ deux propositions. Pour montrer que $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ il suffit de montrer que $(\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$.

Exemple 4.4 : La contraposée de la proposition "*s'il pleut, alors le sol est mouillé*" est "*si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas*".

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'implication suivante : n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

Attention : Il ne faut pas confondre contraposée et réciproque.

IV. C Montrer une proposition par l'absurde

Méthode 4.5

- Pour montrer qu'une proposition est vraie, il suffit de la supposer fausse et d'obtenir une **absurdité**.
- Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit de la supposer vraie et d'obtenir une **absurdité**.

C'est ce qu'on appelle un **raisonnement par l'absurde**.

Exercice 15. Soit x un réel différent de -3 . Montrer que $\frac{x+1}{x+3} \neq 1$.

Exemple 4.6 : L'exemple le plus célèbre de raisonnement par l'absurde est celui de la démonstration de l'infinité de l'ensemble des nombres premiers.

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On sait que $\mathcal{P}$ est non vide vu qu'il contient 2, 3, 5, 7, etc.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'est pas infini, ce qui implique qu'il est fini.

Il possède alors un certain nombre n d'éléments que l'on note $p_1, p_2, \dots, p_n$. Les nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont donc des nombres premiers et, avec notre hypothèse, sont les seuls.

Notons alors $p = p_1 p_2 \dots p_n$ et considérons $q = p + 1$. Comme tout nombre premier est supérieur strictement à 1, le reste de la division euclidienne de q par n'importe quel p_i est 1 (car on écrit $q = p_i \times p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n + 1$ avec $0 \leq 1 < p_i$), donc aucun des p_i ne divise q . Or, d'après le lemme d'Euclide, $q \geq 2$ est divisible par un nombre premier. **Contradiction !**

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

IV. D Raisonnement par disjonction de cas

Méthode 4.7

Lors d'un raisonnement par **disjonction de cas**, on étudie plusieurs cas possibles pour résoudre notre problème, le tout étant de trouver des cas susceptibles de nous aider.

Exercice 16. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)$ est pair.

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x+3| - |x-1| - |2x+1| = 0$

IV. E Raisonnement par analyse-synthèse

Quand on veut déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E qui satisfont une propriété $\mathcal{P}$, on raisonne souvent par analyse-synthèse. Vous utilisez en fait ce type de raisonnement depuis longtemps, sans forcément l'avoir nommé.

- Pour l'analyse (condition nécessaire), on part d'un élément quelconque de E et on montre que s'il satisfait la propriété P , cela nous donne nécessairement des informations sur cet élément et conduit potentiellement à plusieurs possibilités, un nombre fini en général.
- Pour la synthèse (condition suffisante), on vérifie si les possibilités obtenues dans l'analyse satisfont bien la propriété P .

A l'issue de ce raisonnement, on a déterminé tous les éléments de E qui satisfont P ou pas.

Exercice 18. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

IV. F Raisonnement par récurrence

Ce type de raisonnement s'avère très efficace pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier appartenant à $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels) ou à une partie de celui-ci.

Récurrence simple

Théorème 4.8

Considérons une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n et soit n_0 un entier naturel.

Supposons que :

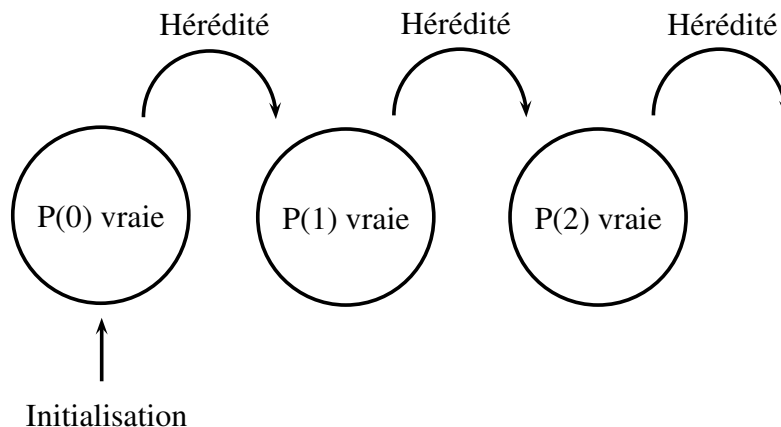
- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Pour tout $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarques 4.9 :

- ▷ Dans de nombreux cas, $n_0 = 0$ ou 1 .
- ▷ La première hypothèse s'appelle **l'initialisation** et la deuxième **l'hérédité**. Le fait de supposer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie s'appelle **l'hypothèse de récurrence**.

Illustration du raisonnement par récurrence



Méthode 4.10

Pour démontrer une propriété par récurrence, on suit le raisonnement suivant :

- **Initialisation** : on montre que la propriété est vraie au rang n_0 .
- On prouve **l'hérédité** : on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geq n_0$ **quelconque** et on montre que cette propriété est encore vraie au rang suivant $n+1$.
- On conclut.

Attention : Lors de l'hérédité, on travaille de manière théorique avec un rang n quelconque ! On ne peut pas choisir une valeur pour n .

Exemple 4.11 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n+1$

Initialisation : Pour $n = 0$: $2^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$. Ainsi on a bien : $2^0 \geq 0 + 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n quelconque, c'est **notre hypothèse de récurrence**. Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie (*on cherche donc à montrer que $2^{n+1} \geq n+2$*).

Alors : $2^{n+1} = 2^n \times 2 \geq (n+1) \times 2$, en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Or $2 \times (n+1) = 2n + 2 \geq n + 2$ car $n \in \mathbb{N}$.

On a alors : $2^{n+1} \geq n+2$, la propriété est donc héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+1$.

Exercice 19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 20. Montrer que la proposition $(\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n^2)$ est fausse.

Montrer en revanche que pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Réurrence finie

Soient $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $n_0 < n_1$ et $P(n)$ une propriété à montrer pour les entiers naturels $n \in \{n_0, \dots, n_1\}$.

Si on a : $P(n_0)$ et pour tout $n \in \{n_0, \dots, n_1 - 1\}$, l'hypothèse $P(n)$ implique $P(n+1)$

alors on a $P(n)$ pour tout $n \in \{n_0, \dots, n_1\}$.

Réurrence double

On peut parfois faire **une récurrence double**. Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, il suffit de démontrer que :

- Les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- Pour n'importe quel entier $n \geq 0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est également vraie.

Exemple 4.12 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^{n+1}$

Réurrence forte

On peut également faire **une récurrence forte**. Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, il suffit de démontrer que :

- La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Pour n'importe quel entier $n \geq 0$, si $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie.

Exemple 4.13 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$

Exercice 21. Montrer par récurrence forte que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est divisible par un nombre premier.

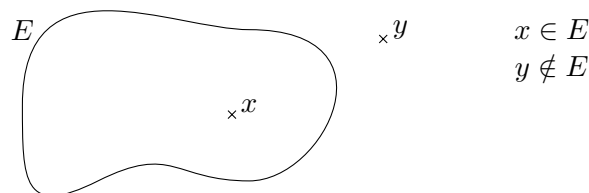
Chapitre 2 : Ensembles, applications et relations

I Généralités

Définition 1.1

- Un **ensemble** est une collection d'objets. Un **élément** de l'ensemble est un des objets qui le constituent.
- Soit E un ensemble.
Lorsque x est un élément de E , on note $x \in E$ et on dit que x **appartient à** E
Lorsque x n'est pas un élément de E , on note $x \notin E$ et on dit que x **n'appartient pas à** E .
- On appelle **ensemble vide** et on note $\emptyset$ l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Représentation d'un ensemble



Il existe (au moins) deux manières de décrire un ensemble :

- On écrit entre accolades la liste de ses éléments : c'est la définition d'un ensemble "en extension".
- On écrit entre accolades les éléments d'un ensemble connu vérifiant une propriété caractéristique : c'est la définition d'un ensemble "en compréhension".

Exemple 1.2 :

1. Ensembles concrets : ensemble des lettres de l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots\}$: on a $y \in \mathcal{A}$ et $3 \notin \mathcal{A}$; ensemble des villes de la Côte d'Azur, ensemble des atomes dans l'univers...
2. Ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+$, $\{-5; 3; 4; 7\}$, $] -3, 4]$, $\mathbb{C}^*$, $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\{2\}$ etc.
3. Ensembles de points en géométrie (le plan, l'espace, une droite, une hyperbole,...)
4. Ensembles de fonctions : ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, ensemble des fonctions paires, ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + xy = 0$, etc.

Exercice 1.

1. Écrire l'ensemble A contenant les 5 premiers entiers naturels.
2. Écrire l'ensemble B des entiers relatifs plus grands que $-\sqrt{2}$.
3. Écrire de deux façons différentes l'ensemble des entiers naturels pairs.

Exercice 2. Écrire plus simplement les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 7\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} / z = \bar{z}\}$$

$$C = \{M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}, \text{ où } \mathcal{P} \text{ désigne l'ensemble des points du plan.}$$

Définition 1.3

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$.

Remarque 1.4 : Ceci signifie qu'à chaque élément de E , on peut faire correspondre un unique entier naturel, et qu'à chaque entier naturel, on peut faire correspondre un unique élément de E . Autrement dit, un ensemble E est dénombrable si on peut "numéroter" ses éléments avec tous les entiers naturels.

Exemple 1.5 : Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Définition 1.6

Un ensemble E est dit **fini** soit s'il est vide, soit s'il existe un entier naturel n non nul tel qu'il existe une bijection de E vers $\{1, 2, \dots, n\}$. Le nombre n est appelé **cardinal** de E , noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$, et on a : $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Remarque 1.7 : Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.

Remarque 1.8 : Un ensemble contenant un seul élément est appelé un **singleton**.

II Comparaison d'ensembles

Définition 2.1

On dit que les ensembles A et B sont **égaux** lorsque A et B ont les mêmes éléments. On note $A = B$.

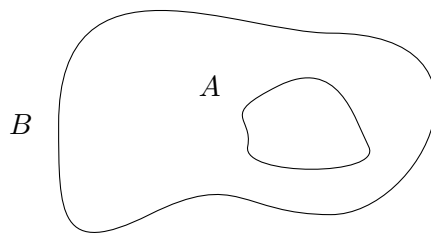
Définition 2.2

On dit que l'ensemble A est **inclus dans** l'ensemble B lorsque tout élément de A est un élément de B .

On note $A \subset B$.

Dans ce cas, on dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B ou que A est une **partie** de B .

Représentation de $A \subset B$



Remarque 2.3 : $A \subset B \iff (\forall x \in A, x \in B)$.

Exercice 3. Soient $A = \{4, 5, 7\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- A et B sont-ils égaux ?
- Quel ensemble est inclus dans l'autre ?
- Donner un ensemble qui contient B .

Méthode 2.4

Pour montrer une inclusion $A \subset B$, on prend un élément **quelconque** de A et on démontre qu'il appartient à B . Le schéma de la preuve est le suivant :

- Soit $x \in A$.
- **Raisonnement**
- Donc $x \in B$.
- Conclusion : pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc $A \subset B$.

Exercice 4. On considère les ensembles $S = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$ et $T = \{x \in \mathbb{R}, (x-1)(x-3) \geq 0\}$. Montrer que $S \subset T$.

Proposition 2.5

Soient A, B, C des ensembles. Alors :

- $A \subset A$.
- $\emptyset \subset A$.
- Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Proposition 2.6 (Double inclusion)

Soient A et B deux ensembles. On a :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Méthode 2.7

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux on procède le plus souvent par double inclusion : on montre d'abord que $A \subset B$ puis que $B \subset A$.

Exercice 5. Montrer que $\{x^2/x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R}/y \geq 0\}$.

III Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 3.1

Soit E un ensemble.

On appelle **ensemble des parties** de E l'ensemble constitué des sous-ensembles de E .

On le note $\mathcal{P}(E)$.

Autrement dit, $\mathcal{P}(E) = \{X, X \subset E\}$.

Exemple 3.2 : Soit $E = \{1, 2\}$. Alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Exercice 6. Soit $F = \{1, 2, 3\}$. Déterminer $\mathcal{P}(F)$.

Remarque 3.3 : L'ensemble vide appartient à l'ensemble des parties de tous les ensembles.

Attention : $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles !

Remarque 3.4 : Si E est un ensemble, alors

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

IV Opérations sur les ensembles

IV. A Union

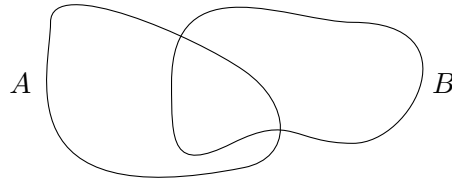
Définition 4.1

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **union** ou **réunion** de A et B l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A ou dans B .

On le note $A \cup B$.

Représentation de $A \cup B$



Exemple 4.2 : Si $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$, quel est l'ensemble $A \cup B$?

Exercice 7. Soit E un ensemble. Qu'est-ce que l'ensemble $E \cup E$? $E \cup \emptyset$?

Définition 4.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles.

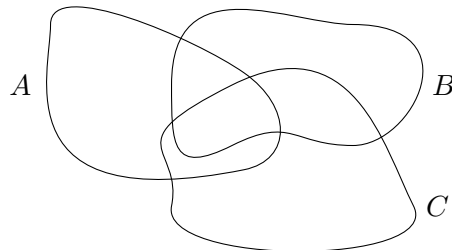
On appelle **union** des A_i pour i allant de 1 à n , l'ensemble constitué des éléments qui sont dans au moins l'un des A_i pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.

On le note $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ou $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

Un élément x appartient à $\bigcup_{i=1}^n A_i$ si et seulement si il appartient au moins à un de ces ensembles. Autrement dit :

$$x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \iff \exists i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, x \in A_i$$

Représentation de $A \cup B \cup C$



Exercice 8. Soient $A_1 = \{1, 2, 3, 6\}$, $A_2 = \{2, 6, 7\}$, $A_3 = \{2, 6, 8\}$ et $A_4 = \{1, 2, 6, 7, 8\}$. Donner

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

Proposition 4.4

Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E . Alors :

- $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ (Associativité)
- $A \cup B = B \cup A$ (Commutativité)
- $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
- $A \cup E = E \cup A = E$
- $A \cup A = A$ (L'opération $\cup$ est idempotente)
- $(B \subset C) \Rightarrow (A \cup B) \subset (A \cup C)$
- $(A \subset C)$ et $(B \subset C) \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$
- $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$.

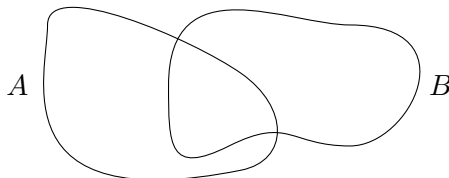
IV. B Intersection

Définition 4.5

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **intersection** de A et B l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A et dans B . On le note $A \cap B$.

Représentation de $A \cap B$



Exemple 4.6 : Reprenons les ensembles de l'exemple 4.2. Quel est l'ensemble $A \cap B$?

Exercice 9. Soit E un ensemble. Qu'est-ce que l'ensemble $E \cap E$? $E \cap \emptyset$?

Définition 4.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ n ensembles.

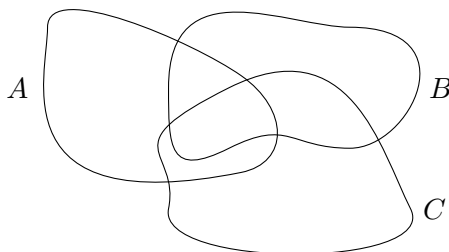
On appelle **intersection** des A_i pour i allant de 1 à n , l'ensemble constitué des éléments qui sont dans tous les A_i pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

On le note $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ou $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

Un élément x appartient à $\bigcap_{i=1}^n A_i$ si et seulement si il appartient à tous les ensembles A_i . Autrement dit :

$$x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x \in A_i$$

Représentation de $A \cap B \cap C$



Exercice 10. En reprenant l'exercice 8, donner $\bigcap_{i=1}^3 A_i$.

Proposition 4.8

Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E . On a :

- $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ (Associativité)
- $A \cap B = B \cap A$ (Commutativité)
- $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$
- $A \cap E = E \cap A = A$
- $A \cap A = A$ (L'opération $\cap$ est idempotente)
- $(B \subset C) \Rightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$
- $(C \subset A)$ et $(C \subset B) \Leftrightarrow C \subset (A \cap B)$
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.

Proposition 4.9

Soient A, B et C des ensembles. Alors

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice 11. Soient A et B deux ensembles. Simplifier $A \cap (B \cup A)$.

Définition 4.10

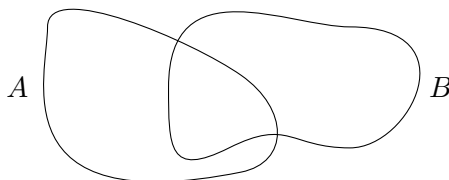
On dit que deux sous-ensembles A et B de E sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Lorsque l'on forme la réunion de deux ensembles disjoints A et B , on parle de la **réunion disjointe de A et de B** et on note $A \coprod B$.

IV. C Différence**Définition 4.11**

Soient A et B deux ensembles.

On appelle A **privé de B** l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B . On le note $A \setminus B$.

Représentation de $A \setminus B$ **Exemples 4.12 :**

- ▷ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- ▷ Si $A = \{1, 2, 3, 6\}$ et $B = \{2, 6, 7\}$, quel est l'ensemble $A \setminus B$?
- ▷ Si E est un ensemble alors quel est l'ensemble $E \setminus E$?

Exercice 12. Montrer que :

1. $A \setminus B = \emptyset$ si $A \subset B$.
2. $A = (A \setminus B) \coprod (A \cap B)$
3. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

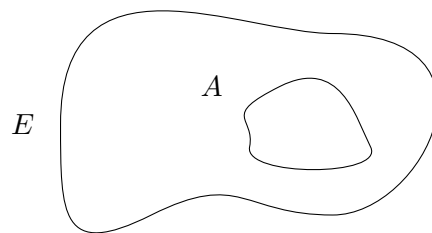
IV. D Complémentaire

Définition 4.13

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E .

On appelle **complémentaire** de A dans E l'ensemble $E \setminus A$. On le note $\complement_E A$ ou, s'il n'y pas ambiguïté sur E : A^c ou encore $\overline{A}$.

Représentation de $\overline{A}$



Exercice 13. Soient $E = [0, 1]$ et $A =]0, 0.2]$, quel est le complémentaire de A dans E ?

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}$, donner le complémentaire de $[3, 5]$.

Exercice 15. Dans l'ensemble E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, trouver le complémentaire :

- Du sous-ensemble $A \subset E$ formé des fonctions f telles que $f(2) = 0$;
- Du sous-ensemble $B \subset E$ formé des fonctions paires.

Proposition 4.14

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . Alors :

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Théorème 4.15 (Lois de Morgan)

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . Alors :

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Autrement dit, le **complémentaire d'une réunion** (resp. d'une intersection) est l'**intersection** (resp. l'**union**) des complémentaires.

Remarque 4.16 : Les lois de Morgan sont vraies pour une réunion ou une intersection finie d'ensembles : soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble et $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles de E . Alors :

$$\bullet \quad \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$\bullet \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

Exercice 16. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble de toutes les villes du monde. On considère les trois sous-ensembles de $\mathcal{V}$ suivants : $\mathcal{F}$ l'ensemble des villes françaises, $\mathcal{C}$ l'ensemble des capitales de pays et $\mathcal{B}$ l'ensemble des villes dont le nom commence par B. Donner plusieurs éléments des ensembles suivants :

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{B}, \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{B}, \quad \mathcal{F} \cap \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{B}^c, \quad \mathcal{F} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{B}, \quad \mathcal{F}^c \cap \mathcal{C}^c \cap \mathcal{B}$$

IV. E Recouvrements, partitions d'un ensemble

Définition 4.17

Soit un ensemble E . Soit P un ensemble de parties de E (i.e. $P \subset \mathcal{P}(E)$).

1. On dit que P est un **recouvrement de E** lorsque $\bigcup_{X \in P} X = E$.
2. On dit que P est un **recouvrement disjoint de E** lorsque P est un recouvrement de E et que, de plus : $\forall (X, X') \in P^2, (X \neq X' \Rightarrow X \cap X' = \emptyset)$.
3. On dit que P est une **partition de E** lorsque P est un recouvrement disjoint de E et que, de plus : $\forall X \in P, X \neq \emptyset$.

- Ainsi un ensemble P de parties de E est une partition de E lorsque :
 1. $\forall X \in P, X \neq \emptyset$
 2. $\forall (X, X') \in P^2, (X \neq X' \Rightarrow X \cap X' = \emptyset)$
 3. $\bigcup_{X \in P} X = E$.
- Les définitions ci-dessus s'appliquent parfois à des familles de parties de E .

Exemple 4.18 : Notons E l'ensemble des candidats au concours Mines-Ponts en filière MP, I le sous-ensemble de E des candidats ayant choisi l'option informatique et S le sous-ensemble de E des candidats ayant choisi l'option SI. (I, S) forme une partition de E .

IV. F Produit cartésien

Définition 4.19

Soient E et F deux ensembles.

On appelle **produit cartésien** de E par F l'ensemble constitué des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

On le note $E \times F$ (lire " E croix F ").

Remarques 4.20 :

- ▷ $E \times F = \{(x, y) / x \in E, y \in F\}$.
- ▷ Le produit cartésien d'un ensemble par lui même est noté E^2 au lieu de $E \times E$.
- ▷ Dans des énoncés de nombreux résultats, on a souvent écrit « $\forall x, y \in \mathbb{R}$ » qui signifie « pour tous réels x et y ». On peut maintenant utiliser la notation « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ » qui signifie « pour tout couple de réels ».
- ▷ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels.
On représente habituellement $\mathbb{R}^2$ par un plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On associe à chaque couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ le point M du plan de coordonnées (x, y) (ou encore d'abscisse x et d'ordonnée y) et on associe à chaque point M du plan le couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ de ses coordonnées.
- ▷ Dans un couple (x, y) , l'ordre est important. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, $(1, 2) \neq (2, 1)$.

▷ Dans un produit cartésien $E \times F$, **deux couples** (x, y) et (z, t) **sont égaux** si et seulement si $x = z$ et $y = t$.

Exemples 4.21 :

- Si $E = \{0, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3\}$, quel est l'ensemble $E \times F$?
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2, i + j = n \right\}$.

Définition 4.22

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \dots, E_n$, n ensembles.

On appelle **produit cartésien** des E_i pour i allant de 1 à n l'ensemble constitué des n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$ (c'est-à-dire pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i \in E_i$).

On le note $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ou $\prod_{i=1}^n E_i$.

Remarque 4.23 : Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ facteurs}}$ de n ensembles égaux à E est également noté E^n .

Exemples 4.24 :

- L'ensemble $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels (ensemble utilisé pour la géométrie dans l'espace).
- L'ensemble $\mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des n -uplets de réels.

V Applications

V. A Définitions et exemples

Définition 5.1

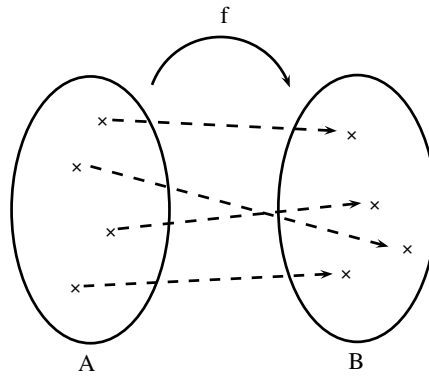
Soient E et F deux ensembles.

- Une **application** f de E dans F est un procédé qui à chaque élément x de E associe **un unique** élément de F noté $f(x)$.
- On note $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et on dit qu'à x on associe $f(x)$.
- On dit que E est l'**ensemble de départ** de f et que F est l'**ensemble d'arrivée** de f . On dit aussi que f est définie sur E à valeurs dans F .
- On note $f \in \mathcal{F}(E, F)$, ou encore $f \in F^E$.

Exemple 5.2 : Voici trois exemples d'applications :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$
- L'application de $\{0, 1, 2\}$ dans $\{0, 1, 2\}$ qui à 0 associe 1, à 1 associe 2, et à 2 associe 0.
- Soit $\mathcal{V} = \{\text{Barcelone, Reykjavik, Le Havre, Madrid, Paris, Strasbourg}\}$ et $\mathcal{P} = \{\text{Allemagne, Espagne, France, Islande}\}$. On peut considérer l'application $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$ qui à une ville associe son pays.

Remarque 5.3 : On représente parfois une application à l'aide d'un diagramme de Venn. Par exemple :



Définition 5.4

Soit $f : E \rightarrow F$. L'ensemble $\{(x, y), x \in E \text{ et } y = f(x)\}$, qui est une partie de $E \times F$ est appelé le **graphe de f** . On le note Γ_f .

Définition 5.5

Deux applications f et g sont **égales** si elles ont le même ensemble de départ E , le même ensemble d'arrivée F et si pour tout x de E , on a $f(x) = g(x)$.

Attention : Deux applications peuvent être définies par la même formule mais être différentes. C'est le cas par exemple si on ne choisit pas le même ensemble de départ ou d'arrivée.

Définition 5.6

Soit E un ensemble. On appelle **identité** de E l'application de E dans E , notée Id_E et définie par :

$$\forall x \in E, Id_E(x) = x$$

Dans la suite, E et F seront deux ensembles.

Définition 5.7

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient $x \in E$ et $y \in F$.

Lorsque $y = f(x)$, on dit que y est **l'image** de x par f et que x est **un antécédent** de y par f .

Attention : Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- Par définition d'une application, tout élément x de E admet une et une unique image par f qui est $f(x)$.
- Un élément y de F peut ne pas avoir d'antécédent, en avoir un ou en avoir plusieurs.

V. B Image directe et image réciproque

Définition 5.8

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- Soit A une partie de E . On appelle **image directe** de A par l'application f l'ensemble noté $f(A)$ défini par :

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in F | \exists x \in A, y = f(x)\}$$

C'est donc l'ensemble de toutes les images des éléments de A .

- Soit B une partie de F . On appelle **image réciproque** de B par l'application f l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$

C'est donc l'ensemble de tous les antécédents possibles pour les éléments de B par l'application f .

Exemples 5.9 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$

L'ensemble de départ est $\mathbb{R}_+$, l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

- Soit $A = [0; 3]$. Quel est l'image de A par f ?
- Soit $B = [2; 5]$. Quelle est l'image réciproque de B par f ?

Attention : L'écriture $f^{-1}(B)$ n'est qu'une notation et ne signifie pas que f^{-1} existe, ce qui nécessiterait que f soit bijective. Si elle ne l'est pas, on n'écrit jamais $f^{-1}(x)$. On peut en revanche écrire $f^{-1}(\{x\})$: c'est l'image réciproque de l'ensemble composé de l'élément x .

Proposition 5.10

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A, A' \in \mathcal{P}(E)$, $B, B' \in \mathcal{P}(F)$.

- Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.
- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ et $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
- Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
- $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

Remarque 5.11 : En général, $f(A) \cap f(A') \not\subset f(A \cap A')$.

Soit par exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et soient $A = [-2, -1]$ et $A' = [1, 2]$. Alors $A \cap A' = \emptyset$ donc $f(A \cap A') = \emptyset$, mais $f(A) \cap f(A') = [1, 4] \cap [1, 4] = [1, 4]$.

De même, il n'y a en général aucune inclusion entre $f(A^c)$ et $(f(A))^c$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Soit $A = [1, 2]$, alors $f(A^c) = \mathbb{R}^+$ et $f(A)^c =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$ donc il n'y a aucune inclusion entre les deux.

V. C Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Définition 5.12

Soit E un ensemble. Si A est une partie de E , on appelle fonction indicatrice de A l'application :

$$\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} .$$

Remarque 5.13 : Cette fonction code simplement l'appartenance ou non d'un élément au sous-ensemble A de E .

Exemple 5.14 : De quel ensemble la fonction $1 - \mathbb{1}_A$ est-elle la fonction indicatrice ?

V. D Suites et familles

Les suites et les familles peuvent être vues comme des applications particulières. C'est ainsi qu'on les définit proprement :

Définition 5.15

Soit E un ensemble et a une application de $\mathbb{N}$ dans E . Au lieu de la notation $a(n)$, on écrit a_n . L'application $a : n \mapsto a_n$ est notée $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on dit que c'est une **suite** d'éléments de E .

On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de E (de préférence à $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$).

Plus généralement, une application d'un ensemble quelconque I dans E est appelée **famille** d'éléments de E , **indexée** par I ; on peut la noter $(a_i)_{i \in I}$.

Remarque 5.16 : En pratique, on n'utilise cette terminologie et ces notations que dans les cas suivants :

- $I = \mathbb{N}$ (ou éventuellement $\mathbb{N} \setminus \{0\}$) : c'est une suite.
- $I = \{1, \dots, n\}$ (aussi noté $[1; n]$) : c'est une famille finie d'éléments de E : $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- $K \subset I \times J$: c'est une famille indexée par deux indices $(i, j) \in K$: $(a_{i,j})_{(i,j) \in K}$.

Exemple 5.17 : On peut considérer la famille de nombres réels $(a_{m,n})_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$a_{m,n} = \frac{1}{m+n+1}$$

On a par exemple $a_{4,2} = \frac{1}{7}$.

VI Opérations sur les applications

VI. A Restriction et prolongement

Définition 6.1

Soient $f : A \rightarrow B$ une application et C un sous-ensemble de A . On appelle **restriction** de f à C , et on note $f|_C$ l'application suivante :

$$\begin{aligned} f|_C &: C \longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Autrement dit, travailler avec une restriction revient à travailler avec moins d'éléments dans l'ensemble de départ.

Exemple 6.2 : Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \ln(|x|) \text{ et } f(0) = 0$$

Alors si on note g la restriction de f à $\mathbb{R}^{-*}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, g(x) = \ln(-x)$$

Définition 6.3

Soient $f : A \rightarrow B$ une application et D un ensemble contenant A ($A \subset D$).

On dit que $g : D \rightarrow B$ est un **prolongement** de f à D lorsque $g|_A = f$, c'est-à-dire lorsque pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$.

Autrement dit, travailler avec un prolongement, c'est « agrandir » l'ensemble de départ.

Exemple 6.4 : La fonction $\ln$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut la prolonger sur tout $\mathbb{R}^+$ en posant :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

VI. B Composition

Dans la suite, A , B et C sont trois ensembles.

Définition 6.5

Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux applications. On appelle **application composée** de f par g et on note $g \circ f$ l'application

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \longrightarrow C \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Remarque 6.6 : L'application est bien définie car l'ensemble d'arrivée de f est égal à l'ensemble de départ de g .

Schéma

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = g \circ f(x). \\ \quad \quad \quad \curvearrowright \\ \quad \quad \quad g \circ f \end{array}$$

Exemple 6.7 : On reprend l'exemple ci-dessus d'une application $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$ qui à une ville associe son pays, avec $\mathcal{V} = \{\text{Barcelone, Reykjavik, Le Havre, Madrid, Paris, Strasbourg}\}$ et $\mathcal{P} = \{\text{Allemagne, Espagne, France, Islande}\}$. Soit $\mathcal{C} = \{\text{Berlin, Madrid, Paris, Reykjavik}\}$ et $g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application qui à un pays associe sa capitale.

Alors l'application $g \circ f$ associe à une ville la capitale dont elle dépend.

Attention : Pour deux applications f et g données, les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$ n'existent pas toujours et lorsqu'elles existent, on a en général $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple 6.8 : Soit $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto x^2$. A t-on l'égalité $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 17. Soit f une application de A dans B . Que vaut $f \circ Id_A$? et $Id_B \circ f$?

Attention :

$Id_A \circ f$ et $f \circ Id_B$ n'existent pas.

VII Injectivité et surjectivité

Dans toute la suite, A et B désignent des ensembles et $f : A \rightarrow B$ une application.

VII. A Injections

Définition 7.1

On dit que $f : A \rightarrow B$ est **injective** lorsque tout élément de B admet au plus un antécédent par f . On dit aussi que f est une **injection** de A dans (ou vers) B .

Retenir

Autrement dit, l'application $f : A \rightarrow B$ est injective si et seulement si pour tout élément y de B , l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in A$ admet au plus une solution.

Exemple 7.2 : La première application est injective mais pas la deuxième :



Exercice 18. L'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

est-elle injective ?

Dans la pratique, on utilise souvent cette caractérisation de l'injectivité :

Théorème 7.3

Une application $f : A \longrightarrow B$ est injective si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in A^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Méthode 7.4

- Pour montrer qu'une application f de A dans B est injective, on se donne deux éléments quelconques x_1 et x_2 de A tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.
- Pour montrer qu'une application f de A dans B n'est pas injective, on cherche deux éléments distincts dans A ayant la même image par l'application f .

Exercice 19. Montrer que $f : \begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$ est injective.

Exercice 20. Montrer que $u : \begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto n^2 + 1 \end{aligned}$ est injective.

Exercice 21. L'application $f_2 : \begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3(x-1)(x+5) \end{aligned}$ est-elle injective ?

Proposition 7.5 (Application aux fonctions strictement monotones)

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Proposition 7.6

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

Exercice 22. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f l'est.

VII. B Surjections

Définition 7.7

On dit que $f : A \rightarrow B$ est **surjective** lorsque tout élément de B admet au moins un antécédent par f c'est-à-dire :

$$\forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y.$$

On dit aussi que f est une **surjection** de A sur (ou vers) B .

Retenir

Autrement dit, l'application $f : A \rightarrow B$ est surjective si et seulement si pour tout élément y de B , l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in A$ admet au moins une solution.

Méthode 7.8

- Pour montrer qu'une application $f : A \rightarrow B$ est surjective, on se donne un élément y quelconque dans B et on montre qu'il a au moins un antécédent, par exemple en montrant que l'équation $f(x) = y$ a au moins une solution dans A .
- Pour montrer qu'une application $f : A \rightarrow B$ n'est pas surjective, on cherche un élément de B n'ayant pas d'antécédent dans A .

Exemple 7.9 : La deuxième application est surjective mais pas la première :



Exercice 23. Les applications suivantes sont-elles surjectives ?

$$\begin{array}{llll} f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ & f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow]1; +\infty[& u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto x^2 & x \longmapsto x^2 & x \longmapsto (e^x)^2 + 1 & n \longmapsto n + 1 \end{array}$$

Remarque 7.10 : $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Proposition 7.11

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

Exercice 24. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est.

VII. C Bijections

Définition 7.12

On dit que $f : A \rightarrow B$ est **bijection** lorsqu'elle est à la fois surjective et injective.

On dit aussi que f est une **bijection** de A dans (ou sur) B .

Proposition 7.13

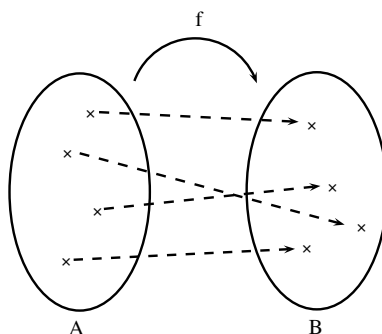
L'application $f : A \rightarrow B$ est bijective si et seulement si tout élément y de B admet un et un seul antécédent par f c'est-à-dire :

$$\forall y \in B, \exists! x \in A / f(x) = y$$

Retenir

L'application $f : A \rightarrow B$ est bijective si et seulement si pour tout élément y de B , l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in A$ admet une unique solution.

Une application f bijective peut être représentée par le diagramme de Venn suivant :

**Méthode 7.14**

Pour montrer qu'une application f de A dans B est bijective on peut :

- Soit montrer que f est injective et surjective.
- Soit montrer que pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in A$ admet une unique solution.

Exercice 25. La fonction f_3 définie dans un exemple précédent par

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\longrightarrow]1; +\infty[\\ x &\longmapsto (e^x)^2 + 1 \end{aligned}$$

était surjective. Est-elle bijective ?

Exercice 26. Les fonctions affines sont-elles bijectives ?

Définition 7.15

Soit f une bijection de A dans B .

On appelle **application réciproque de f** et on note f^{-1} l'application de B dans A qui à tout élément $y \in B$ associe son unique antécédent $x \in A$ par f .

Méthode 7.16

Pour déterminer l'application réciproque f^{-1} d'une bijection f de A dans B , on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dont l'unique solution est $x = f^{-1}(y)$.

Remarque 7.17 : La démonstration de la bijectivité d'une application et la détermination de son application réciproque peuvent donc se faire en une seule étape : pour y dans B , on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in A$. Si cette équation admet une unique solution pour chaque y de B alors f est une bijection de A dans B et $f^{-1}(y) = x$.

Exercice 27.

Déterminer la bijection réciproque de l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$.

Proposition 7.18

Soit $f : A \rightarrow B$ une bijection.

1. Alors $f^{-1} : B \rightarrow A$ est aussi une bijection et $(f^{-1})^{-1} = f$
2. $\forall (x, y) \in A \times B, f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
3. $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$
4. $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$
5. $f^{-1} \circ f = Id_A$ et $f \circ f^{-1} = Id_B$

Théorème 7.19

Soit $f : A \rightarrow B$ une application.

f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : B \rightarrow A$ telle que $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$.

Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Exemple 7.20 : Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, définie par : $f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
Montrer que f est bijective.

Proposition 7.21

Soient A, B et C trois ensembles.

Si les applications $g : B \rightarrow C$ et $f : A \rightarrow B$ sont bijectives alors $g \circ f$ est une bijection de A dans C et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 28. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$. Montrer que si $g \circ f$ est injective et $f \circ g$ surjective, alors f et g sont bijectives.

VIII Relations binaires**Définition 8.1**

Soit E un ensemble.

- Une **relation binaire** (ou relation) **sur** (ou **dans**) E est la donnée d'une assertion $A(x, y)$ dépendant de $(x, y) \in E^2$. Ainsi $A(x, y)$ est soit vraie, soit fausse, suivant le couple (x, y) .
- Si on note $\mathcal{R}$ cette relation binaire, et si x et y sont des éléments de E , on notera $x\mathcal{R}y$ (" x est en relation avec y "), lorsque $A(x, y)$ est vraie.

Remarques 8.2 :

- ▷ Une relation binaire est en fait la donnée d'un sous-ensemble de E^2 , appelé son graphe Γ . Ce n'est finalement qu'une façon de relier entre eux certains éléments de E .
- ▷ Si $x\mathcal{R}y$, on n'a pas forcément $y\mathcal{R}x$. Les relations telles que définies mathématiquement ne sont pas forcément « réciproques ». C'est la même chose que lorsqu'on connaît une personne : cette personne ne nous connaît pas nécessairement.

Exemples 8.3 :

1. L'égalité est une relation binaire sur tout ensemble E .
2. $\leq$ est une relation binaire sur $\mathbb{R}$.
3. Dans $\mathbb{N}$, on connaît la relation binaire de divisibilité, notée $|$ et définie, pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ par : $a | b$ (a divise b) lorsqu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $b = aq$.

4. "Est parallèle à" est une relation binaire sur $\mathcal{D}$, ensemble des droites d'un plan donné.
5. Soit E un ensemble. L'inclusion est une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

On ne s'intéresse en pratique qu'à des relations binaires qui vérifient certaines propriétés.

Définition 8.4

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E .

- $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** lorsque : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** lorsque : $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est dite **anti-symétrique** lorsque : $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- $\mathcal{R}$ est dite **transitive** lorsque : $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemples 8.5 :

1. Soit E un ensemble. L'inclusion est une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$. Elle est réflexive, anti-symétrique et transitive mais non symétrique.
2. La relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$ est une relation binaire : elle est réflexive et transitive mais ni symétrique ni antisymétrique (car $-k$ et k se divisent l'un l'autre).

VIII. A Relations d'équivalence

Définition 8.6

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** lorsque :

- $\mathcal{R}$ est réflexive ;
- $\mathcal{R}$ est symétrique ;
- $\mathcal{R}$ est transitive.

Exemples 8.7 :

1. L'égalité est une relation d'équivalence.
2. Le fait d'avoir le même signe sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.
3. Sur $\mathbb{R}$, on définit une relation binaire par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y [2\pi]$; c'est une relation d'équivalence.

Définition 8.8

Étant donnée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E , et un élément $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence de x** la partie de E notée $\bar{x}^{\mathcal{R}}$, ou plus simplement $\bar{x}$, suivante :

$$\{y \in E, y\mathcal{R}x\}$$

On dit qu'une partie F de E est une classe d'équivalence de $\mathcal{R}$ lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $F = \bar{x}$. x est alors appelé un représentant de la classe d'équivalence F .

Exemples 8.9 :

1. Si $\mathcal{R}$ est l'égalité, les classes d'équivalences sont précisément les singletons.
2. Plaçons nous dans le cas $E = \mathbb{Z}$ et $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = \pm b$. Les classes d'équivalence sont les paires $\{n, -n\}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et le singleton $\{0\}$.
3. Plaçons nous dans le cas $E = \mathbb{N}$, fixons un entier naturel $k > 0$ et considérons $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \equiv b [k]$, c'est à dire la restriction à $\mathbb{N}$ de la congruence modulo k . Les classes d'équivalence sont les ensembles $k\mathbb{N} + r = \{kn + r, n \in \mathbb{N}\}$, pour $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Remarques 8.10 :

- ▷ La réflexivité de $\mathcal{R}$ se traduit par $\forall x \in E, x \in \bar{x}$. En particulier, la réunion de toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ donne E .

▷ La symétrie et la transitivité montrent qu'on a $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$. En particulier l'intersection de deux classes d'équivalences distinctes est toujours disjointe.

Théorème 8.11

Soit un ensemble E muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

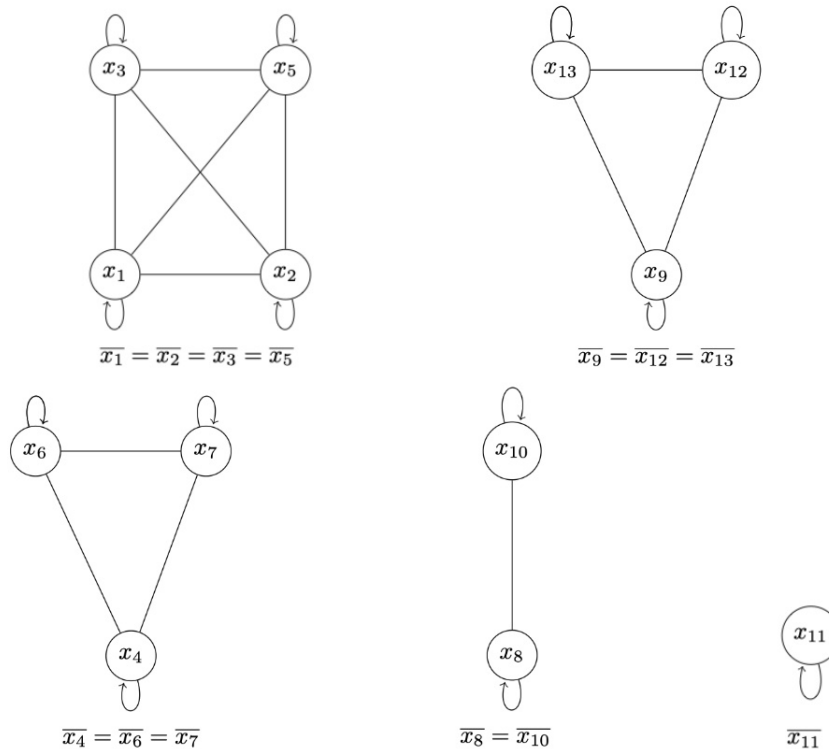
L'ensemble des classes d'équivalence de E (pour $\mathcal{R}$) forment une partition de E .

Remarque 8.12 : Une relation d'équivalence sur un ensemble fini peut être représentée par son graphe (cf. figure ci-dessous).

Ce graphe possède un certain nombre de caractéristiques :

- Le graphe se décompose en un certain nombre de blocs non reliés les uns aux autres, les points au sein d'un même bloc étant reliés (on parle de composantes connexes du graphe).
- Chaque point appartient à un bloc (il y est éventuellement seul). Ainsi, les blocs forment une partition de E .
- A l'intérieur de chaque bloc, toutes les flèches possibles sont présentes (y compris celles reliant un point et lui-même) : il s'agit d'un sous-graphe complet.

Les différents blocs sont *les classes d'équivalence*.



VIII. B Relation d'ordre

Définition 8.13

Une relation binaire sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si :

- $\mathcal{R}$ est réflexive ;
- $\mathcal{R}$ est anti-symétrique ;
- $\mathcal{R}$ est transitive.

Exemples 8.14 :

1. Sur $\mathbb{R}$, $\leq$ est une relation d'ordre.

2. L'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

Remarque 8.15 : $<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.

Définition 8.16

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\preceq$. La relation d'ordre $\preceq$ est dite **totale** si : $\forall (x, y) \in E^2, (x \preceq y \text{ ou } y \preceq x)$. Sinon elle est dite **partielle**.

Exemples 8.17 :

1. Sur $\mathbb{R}$, $\leq$ est une relation d'ordre totale.
2. Si l'on définit sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la relation $\leq$ par : $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$, alors il s'agit d'une relation d'ordre partielle.
3. La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre partielle car 2 et 3 ne se divisent pas.

Définition 8.18

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\preceq$, A une partie de E .

1. Un élément M de E est appelé un **majorant** de A si, pour tout x de A , $x \preceq M$.
S'il existe a dans A tel que pour tout x de A , $x \preceq a$ alors a est appelé **plus grand élément**, ou **maximum** de A et on le note $a = \max(A)$.
2. Un élément m de E est appelé un **minorant** de A si, pour tout x de A , $m \preceq x$.
S'il existe a dans A tel que pour tout x de A , $a \preceq x$ alors a est appelé **plus petit élément**, ou **minimum** de A et on le note $a = \min(A)$.

Remarques 8.19 :

- ▷ Lorsqu'il existe, le plus grand élément est unique. Cela découle de l'anti-symétrie de la relation d'ordre.
- ▷ Le plus grand élément est un majorant. Par contre un ensemble peut admettre un majorant (on dit que cet ensemble est **majoré**) sans admettre de plus grand élément.

Exemples 8.20 :

1. Le sous-ensemble $] - \infty, 1[$ de $\mathbb{R}$ admet une infinité de majorants mais aucun plus grand élément. Il n'admet aucun minorant et donc aucun plus petit élément.
2. Comme on le voit dans l'exemple précédent, il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui sont majorées mais n'admettent aucun plus grand élément. Néanmoins, pour $] - \infty, 1[\subset \mathbb{R}$, 1 est remarquable car c'est le plus petit des majorants. Nous le nommerons bientôt **borne supérieure** de $] - \infty, 1[$.
3. Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre "divisibilité", l'ensemble $\{2, 6, 10\}$ a comme plus petit élément 2 et comme majorant 30, mais ne possède pas de plus grand élément.
4. Dans $\mathcal{P}(E)$, muni de l'inclusion. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$. Alors $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ est un majorant de $\mathcal{A}$ et $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ est un minorant de $\mathcal{A}$.

Exercice 29. Si $f_1, \dots, f_n$ sont des applications de $E \rightarrow \mathbb{R}$, déterminer une fonction qui majore les f_i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Chapitre 3 : Systèmes linéaires

I Vocabulaire

Définition 1.1

Une **équation linéaire** à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ est une équation du type :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = b$$

avec $a_1, a_2, \dots, a_p, b$ des éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Un **système linéaire** de n équations linéaires à p inconnues est constitué de n équations du type précédent. On le note :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

avec $a_{i,j}$ le coefficient de l'inconnue x_j dans la i -ème équation.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on appelle i -ème ligne et on note (L_i) la i -ème équation du système.

Résoudre un système de n équations à p inconnues revient à déterminer tous les p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant simultanément les n équations du système.

Exemple 1.2 : Le système suivant :

$$(S) \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = -3 & (L_1) \\ -2x_1 + x_2 = 12 & (L_2) \\ x_1 - 4x_2 = -5 & (L_3) \end{cases}$$

est un système d'équations linéaires à 3 équations et 2 inconnues.

Remarque 1.3 : Interprétations géométriques dans les cas $p = 2$ et $p = 3$.

1. **Système d'équations linéaires à deux inconnues réelles ($p = 2$)**

Le plan usuel $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère $\mathcal{R}$, résoudre le système

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (D_1) \\ \vdots \\ a_nx + b_ny = c_n & (D_n) \end{cases}$$

où sont donnés les réels a_i, b_i et c_i , et où l'inconnue est $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, revient à déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ vérifient (S) . Lorsque l'on a de plus $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ pour tout i , chacune des lignes du système est une équation de droite D_i , et ainsi, résoudre (S) revient à déterminer l'intersection des n droites $D_1, \dots, D_n$.

2. **Système d'équations linéaires à trois inconnues réelles ($p = 3$)**

L'espace usuel $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère $\mathcal{R}$, résoudre le système

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & (P_1) \\ \vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz = d_n & (P_n) \end{cases}$$

où sont donnés les réels a_i, b_i, c_i et d_i , et où l'inconnue est $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, revient à déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ vérifient (S) . Lorsque l'on a de plus $(a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0)$ pour tout i , chacune des lignes du système est une équation de plan P_i , et ainsi, résoudre (S) revient à déterminer l'intersection des n plans $P_1, \dots, P_n$.

Exercice 1. Pour chacun des systèmes linéaires suivants, préciser le nombre d'équations, le nombre d'inconnues puis résoudre le système.

$$(S_1) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

Remarque 1.4 : Quand on donne les solutions d'un système, il est très important de donner le n -uplet dans le "bon ordre".

Définition 1.5

- Un système est dit **homogène** lorsque tous les coefficients du second membre sont nuls : $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.
- On appelle **système homogène associé** au système (S) le système obtenu en remplaçant tous les coefficients du second membre $b_1, b_2, \dots, b_n$ du système (S) par des 0.

Définition 1.6

- Un système est dit **incompatible** s'il n'admet aucune solution.
- On appelle **système de Cramer** tout système comportant autant d'inconnues que d'équations et qui admet exactement une solution.

Retenir

Un système peut avoir une infinité de solutions, aucune solution ou encore une unique solution.

Exemples 1.7 :

- Le système d'équations :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

est un système incompatible.

- Le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

est un système de 2 équations à 2 inconnues, et n'admet qu'une seule solution : le couple $(2, 1)$. C'est donc un système de Cramer.

- Il existe des systèmes admettant une infinité de solutions. Par exemple :

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -4 \end{cases}$$

Les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes. On peut seulement exprimer y en fonction de x (ou le contraire) :

$$y = 2x - 2$$

Et donc l'ensemble solution du système est : $\mathcal{S} = \{(x, 2x - 2), x \in \mathbb{K}\}$.

Définition 1.8

Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble solution. On note dans ce cas : $(S) \iff (S')$.

où a, b, c, a', b', c' sont des réels donnés et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est l'inconnue.

- Lorsque $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$, le plan usuel $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère $\mathcal{R}$, l'ensemble des solutions est l'intersection de deux droites.

Définition 2.1

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ des vecteurs du plan usuel $\mathcal{P}$ muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}$. On appelle **déterminant des vecteurs** $(\vec{u}, \vec{v})$ dans $\mathcal{B}$, noté $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$, le nombre réel $\alpha\beta' - \beta\alpha'$, qui est noté $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$.

Définition 2.2 (Déterminant d'un système de deux équations à deux inconnues)

On appelle déterminant du système $(S) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, le nombre, noté :

$$\det(S) \stackrel{\text{def}}{=} ab' - ba' \left(= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

Proposition 2.3

(S) admet une et une seule solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $\det(S) \neq 0$.

III Résolution d'un système linéaire échelonné

III. A Si $n = p$

$$(S) \begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ 5y + z = 8 \\ -2z = 4 \end{cases}$$

Il suffit de "remonter le système" pour obtenir les valeurs des inconnues les unes après les autres. On commence par la dernière équation, qui donne : $z = -2$, et on remplace dans l'équation précédente, ce qui donne : $5y - 2 = 8$, d'où : $y = 2$. Enfin on remplace dans la première équation, ce qui donne : $2x - 2 - 6 = -5$ d'où : $x = \frac{3}{2}$. On obtient une solution unique : $\mathcal{S} = \{(\frac{3}{2}, 2, -2)\}$.

$$\text{On écrit : } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ 5y - 2 = 8 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 - 6 = -5 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

III. B Si $n < p$

Le système échelonné aura nécessairement une infinité de solutions qu'on va pouvoir exprimer en fonction des dernières inconnues "en remontant" le système comme précédemment :

$$(S) \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$$

Dans la deuxième équation, on obtient : $y = 4 - 2z$, puis $x = -2 + 2y - z = -2 + 2(4 - 2z) - z = 6 - 5z$, soit : $\mathcal{S} = \{(6 - 5z, 4 - 2z, z), z \in \mathbb{K}\}$. On a alors une représentation paramétrique des solutions.

3. On souhaite faire disparaître les termes en x_1 sur toutes les lignes, sauf la première. On effectue alors des opérations du type $L_i \leftarrow L_i - aL_1$. Ici on fait $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$ et on obtient.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ -8x_2 - 4x_3 = 16 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

4. On recommence le procédé avec les autres lignes. On veut que le coefficient de x_2 de la deuxième ligne, le deuxième pivot, soit non nul et **le plus simple possible** etc.

$$(S) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ \boxed{2x_2} + 3x_3 = 0 \\ -8x_2 - 4x_3 = 16 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 + 4L_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_3 = 16 \end{cases}$$

5. On se ramène ainsi à un système échelonné (ici triangulaire) que l'on sait résoudre.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_2 = 0 - 3x_3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - 2 = -1 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

L'unique solution du système (S) est le triplet $(-1, -3, 2)$.

Remarques 4.7 :

- ▷ Quand on résout un système il faut placer les inconnues en colonnes pour faciliter les calculs.
- ▷ A chaque étape on peut soit échanger deux lignes soit pour un i fixé effectuer simultanément les opérations $L_j \leftarrow aL_j + bL_i$ pour $j > i$.
- ▷ On indiquera toujours les opérations effectuées.

Exercice 2. Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système suivant :

$$(S_2) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Remarque 4.8 : Parfois la méthode du pivot de Gauss n'est pas la plus adaptée, par exemple quand un système a beaucoup de coefficients nuls. Il peut être plus rapide de le résoudre par substitution par exemple :

$$(S) \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

IV. C Systèmes avec plus d'équations que d'inconnues

Méthode 4.9

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Si un système à n équations et p inconnues avec $n > p$, on procède de la manière suivante :

- On ne travaille qu'avec p équations, on se ramène donc à un système avec autant d'équations que d'inconnues que l'on sait résoudre (grâce à la méthode du pivot de Gauss).
- S'il y a des solutions, on remplace celles-ci dans les équations restantes pour voir si ces solutions le sont aussi pour ces équations.

Exemple 4.10 : Résoudre le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x - 3y + 4z = 8 \\ -6x + 2y + z = 5 \\ 5x + y - z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Chapitre 4 : Sommes et produits

I Rappels : les ensembles de nombres

Il existe différents ensembles de nombres :

- L'ensemble noté $\mathbb{N}$, des entiers naturels : $0, 1, 2, 3, \dots$,
- L'ensemble noté $\mathbb{Z}$, des entiers relatifs : $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
- L'ensemble noté $\mathbb{Q}$, des rationnels : $0, 1, -2, \frac{1}{2}, \frac{333}{106}, \dots$
- L'ensemble noté $\mathbb{R}$, des réels : $0, 1, -2, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, \dots$
- L'ensemble noté $\mathbb{C}$ des complexes : $0, 1, -2, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, i, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \dots$

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons particulièrement aux nombres entiers.

II Sommes

II. A Le signe $\sum$

Si l'on souhaite écrire la somme de tous les entiers de 1 à 50, on peut utiliser des points de suspension et écrire

$$1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50$$

Cette notation n'est ni pratique, ni rapide. On utilise en Mathématiques le symbole $\sum$ (c'est un **Sigma** majuscule). Dans l'exemple précédent, on écrit

$$1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 = \sum_{k=1}^{50} k$$

Dans ce cas, $\sum_{k=1}^{50} k$ se lit : « **somme pour k allant de 1 à 50 des k** ».

Définition 2.1

Dans le cas général : soit $(p, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p \leq n$, et soient $x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$ ou même de $\mathbb{C}$. La somme $S = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n$ se note aussi :

$$S = \sum_{k=p}^n x_k$$

Remarques 2.2 :

- ▷ La lettre k peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre (qui n'est pas déjà utilisée). On dit que c'est une lettre muette, appelée **indice de sommation**. On peut ainsi écrire :

$$S = \sum_{k=p}^n x_k = \sum_{i=p}^n x_i = \sum_{l=p}^n x_l$$

$$\triangleright \sum_{k=p}^p x_k = x_p$$

▷ Attention, dans notre définition ci-dessus de $\sum_{k=p}^n x_k$, **les bornes de la somme sont dans l'ordre croissant i.e. $p \leq n$.**

Pour autant, on a le droit d'écrire $\sum_{k=p}^n x_k$ avec $n < p$, mais attention : on considère que, dans le cas où $n < p$, l'ensemble que parcourt le compteur est vide et la somme est alors posée égale à 0 .

Ainsi, on pose $\sum_{k=p}^n x_k = 0$ lorsque $n < p$.

▷ D'une façon générale l'indexation peut se faire sur n'importe quel ensemble fini.

On pourra par exemple écrire : $\sum_{i \in I} x_i$ où $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ où les x_i sont des nombres complexes.

Exemple 2.3 : Ecrire avec le signe $\sum$ les sommes suivantes :

- $S_1 = 10^2 + 11^2 + \dots + 99^2 + 100^2$
- $S_2 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100}$
- $S_3 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 25 + 27$
- $S_4 = 1 - 2 + 3 - \dots - 98 + 99 - 100$

II. B Quelques Propriétés

Proposition 2.4 (Linéarité)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ des nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- $\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k.$
- $\sum_{k=1}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=1}^n u_k.$
- $\sum_{k=1}^n 1 = n.$

Exemple 2.5 :

$$\sum_{k=1}^n (2k) = \dots$$

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \dots$$

$$\sum_{k=1}^n k(k^2 - 2) = \dots$$

Remarque 2.6 : Attention aux valeurs minimale et maximale de l'indice de sommation. On a en effet :

$$\sum_{k=1}^{100} 1 = 100, \text{ et } \sum_{k=0}^{100} 1 = 101$$

Remarque 2.7 : Il peut être parfois utile de réécrire une somme en changeant l'indice de sommation, en numérotant différemment les termes de la somme. Par exemple, les sommes ci-dessous sont en réalité les mêmes.

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{p+1} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=3}^{p+2} \frac{1}{k-2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$$

Méthode 2.8 (Changement d'indice)

Dans le cas général, soient $n \in \mathbb{N}$ et $u_0, u_1, \dots, u_n$, des nombres complexes. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_{k-1} = \sum_{k=0}^n u_k$$

Pour passer de la première somme à la deuxième, on pose $j = k - 1$ et on remarque que quand $k = 1$, $j = 0$ et quand $k = n + 1$, $j = n$.

Remarque 2.9 : Il existe de nombreux changement d'indices : $j = k + 1$, $j = k + 2$ etc...

Exercice 1. Parmi les sommes suivantes, donner celles qui sont égales à $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2n-i}$:

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}, \quad \sum_{i=-n}^0 \frac{1}{n-i}$$

Proposition 2.10 (Relation de Chasles)

Soient $(p, n) \in \mathbb{Z}^2$, avec $p < n$, et $u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$ des nombres complexes. Alors si m est un entier compris entre p et $n - 1$,

$$\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p}^m u_k + \sum_{k=m+1}^n u_k$$

Autrement dit,

$$(u_p + u_{p+1} + \dots + u_n) = (u_p + u_{p+1} + \dots + u_m) + (u_{m+1} + \dots + u_n)$$

Remarque 2.11 : Plus généralement, si $I = J \amalg K$, alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in J} a_i + \sum_{i \in K} a_i$.

Proposition 2.12

Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \leq j$. Alors

$$\sum_{k=i}^j 1 = j - i + 1$$

Autrement dit, « entre i et j » il y a $j - i + 1$ entiers.

Exercice 2. Combien y a-t-il d'entiers entre 11 et 22 ?

Exercice 3. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{100} 10$.

Remarque 2.13 : Parfois certaines sommes peuvent se simplifier facilement, c'est le cas lorsque le terme général de la somme est de la forme $v_{k+1} - v_k$.

Soit $(p, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p \leq n$, et soient $v_p, v_{p+1}, \dots, v_{n+1}$ des éléments de $\mathbb{C}$. Alors :

$$\sum_{k=p}^n (v_{k+1} - v_k) = (v_{p+1} - v_p) + (v_{p+2} - v_{p+1}) + \dots + (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_p$$

Une telle somme est dite "**télescopique**".

Remarques 2.14 :

- ▷ Une somme télescopique est donc « simple » : il suffit de remarquer une expression du type « terme d'une suite » - « terme précédent de la suite » dans une somme pour qu'elle soit télescopique.
- ▷ Il ne faut pas apprendre le résultat par coeur ! Il peut y avoir quelques variantes : il faut retenir la preuve de la proposition !

Exercice 4. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, calculer $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$ (on transformera judicieusement $\frac{1}{k(k-1)}$...).

II. C Sommes à connaître

Proposition 2.15

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$.

- $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$

Remarque 2.16 : Dans les trois premières sommes précédentes, on peut choisir 1 pour premier indice de la somme (car les premiers termes sont nuls).

Remarque 2.17 : La première somme est un cas particulier d'une somme de $(n+1)$ termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0.

Dans le cas général, une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

On a alors, pour p et q dans $\mathbb{N}$ tels que $p \leq q$: $\sum_{k=p}^q u_k = (q-p+1) \frac{u_p + u_q}{2}$

Remarque 2.18 : La dernière somme est un cas particulier d'une somme de $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Dans le cas général, une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.

On a alors, si $q \neq 1$, pour p et n dans $\mathbb{N}$ tels que $p \leq n$: $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

Proposition 2.19 (Factorisation de $a^n - b^n$)

Soient a et b deux nombres entiers, et n un entier non nul.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

On a en particulier :

$$a^n - 1 = (a-1) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} = (a-1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

II. D Somme des termes d'indices pairs (resp. impairs)

Proposition 2.20

Somme des termes d'indices pairs (resp. impairs).

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. On a :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n x_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x_{2k} \quad , \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n x_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} x_{2k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n x_k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n x_k$$

III Produits

III. A Le signe $\prod$

Comme dans le cas d'une somme, il existe un signe permettant d'écrire de manière simple un produit. Par exemple, on écrit :

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 25 \times 26 = \prod_{i=1}^{26} i$$

Dans ce cas, la notation $\prod_{i=1}^{26} i$ se lit : « **produit des i pour i allant de 1 à 26** ».

Définition 3.1

Dans le cas général : soit $(p, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p \leq n$, et soient $x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$ ou même de $\mathbb{C}$. Le produit $P = x_p \times x_{p+1} \times \dots \times x_n$ se note aussi :

$$P = \prod_{k=p}^n x_k$$

Remarques 3.2 :

- ▷ Comme dans le cas des sommes, la lettre k peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre (qui n'est pas déjà utilisée). On dit que c'est une lettre muette. On peut ainsi écrire :

$$P = \prod_{k=p}^n x_k = \prod_{i=p}^n x_i = \prod_{l=p}^n x_l$$

- ▷ $\prod_{k=p}^p x_k = x_p$

- ▷ Attention, dans notre définition ci-dessus de $\prod_{k=p}^n x_k$, les bornes du produit sont dans l'ordre croissant i.e. $p \leq n$.

Pour autant, on a le droit d'écrire $\prod_{k=p}^n x_k$ avec $n < p$, mais attention : on considère que, dans le cas où $n < p$, l'ensemble que parcourt le compteur est vide et le produit est alors égal à 1 .

Ainsi, on pose $\prod_{k=p}^n x_k = 1$ lorsque $n < p$.

▷ D'une façon générale l'indexation peut se faire sur n'importe quel ensemble fini.

On pourra par exemple écrire : $\prod_{i \in I} x_i$ où $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ où les x_i sont des nombres complexes.

Exercice 6. Ecrire avec le symbole $\prod$ les produits suivants :

- $P_1 = 1^2 \times 2^2 \times \dots \times 99^2 \times 100^2$
- $P_2 = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 27 \times 29$

Exercice 7. Ecrire avec des points de suspension les produits suivants :

- $\prod_{k=5}^{20} (2k^3)$
- $\prod_{i=1}^{100} \frac{i}{i+1}$

Remarque 3.3 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$, $\prod_{i=1}^n \lambda = \lambda^n$

III. B Factorielle d'un entier

Définition 3.4

Pour tout entier naturel n , on appelle **factorielle de n** , et on note $n!$, l'entier naturel défini par

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 3.5 : $4! =$

Remarques 3.6 :

- ▷ Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$. On peut donc construire $n!$ par récurrence.
- ▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $n!$ s'écrit avec le signe $\prod$ de la manière suivante :

$$n! = \prod_{i=1}^n i$$

Exercice 8. Simplifier l'expression $\frac{5!3!}{4!2!}$.

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $\frac{(2n+1)!n!}{(n+1)!(2n)!}$.

III. C Quelques propriétés

Proposition 3.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des complexes.

- Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ strictement plus petit que n , $\prod_{k=1}^n x_k = \prod_{k=1}^m x_k \times \prod_{k=m+1}^n x_k$.

Autrement dit,

$$(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) = (x_1 \times x_2 \times \dots \times x_m) \times (x_{m+1} \times \dots \times x_n)$$

- $\prod_{k=1}^n (x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) \times \left(\prod_{k=1}^n y_k \right)$.

Autrement dit,

$$(x_1 y_1) \times \dots \times (x_n y_n) = (x_1 \times \dots \times x_n) \times (y_1 \times \dots \times y_n)$$

Plus généralement, si $I = J \amalg K$, alors $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i \in J} a_i \times \prod_{i \in K} a_i$.

- Si tous les nombres complexes $y_1, \dots, y_n$ sont non nuls, $\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\prod_{k=1}^n y_k}$.

Autrement dit,

$$\frac{x_1}{y_1} \times \dots \times \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1 \times \dots \times x_n}{y_1 \times \dots \times y_n}$$

Proposition 3.8

Comme dans le cas de la somme, il existe des situations de télescopage.

Pour $(p, n) \in \mathbb{Z}^2$ et pour $x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{C}$ non nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=p}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_p}$$

Exercice 10. Simplifier $\prod_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$.

IV Le triangle de Pascal et le binôme de Newton

IV. A Le triangle de Pascal

C'est le triangle infini de nombres entiers suivant :

p	0	1	2	3	4	5	6	...
$n = 0$	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	

Remarque 4.1 : Chaque nombre est la somme de celui du dessus et de celui qui se trouve à gauche de celui du dessus s'ils existent.

On note $\binom{n}{p}$ le nombre de la ligne n et de la colonne p , que l'on lit « p parmi n ». ¹ C'est en effet le nombre de possibilités de choisir par exemple p élèves dans une classe de n élèves.

Remarque 4.2 : Par convention, $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$, de même si $p < 0$.

Définition 4.3

Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Par définition :

- $\binom{n}{0} = 1$
- si $p \leq n$, $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$
- si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$

Proposition 4.4

Soient $p, n \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq p \leq n$. Alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Proposition 4.5

Soient $p, n \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq p \leq n$. Alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

IV. B Le binôme de Newton

Proposition 4.6

Soient n un entier naturel, a et b deux nombres entiers. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Remarques 4.7 :

▷ Nous verrons que cette égalité reste vraie si $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Dans les vieux livres, dans la tradition de l'école mathématique française on notait $\binom{n}{p}$ par C_n^p

▷ Les nombres $\binom{n}{p}$ du triangle de Pascal sont aussi appelés "coefficients du binôme". Ils ont été vus au lycée avec la loi binomiale en probabilités.

Exercice 11. Calculer $(x+1)^3$, $(x-1)^3$, $(x+2)^4$.

Proposition 4.8

En prenant des valeurs particulières pour a et b , on a alors, pour $n \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

V Sommes doubles

V. A Sommes doubles à indices indépendants

Soient n et p deux entiers naturels. Considérons les éléments d'un tableau de $n \times p$ nombres complexes, que l'on repère par deux indices : leur ligne i , et leur colonne j :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ & & \dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ & & \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Définition 5.1

La somme de tous ces nombres s'écrit :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij}$$

On peut calculer cette somme ligne par ligne ou colonne par colonne, donc :

Proposition 5.2

Pour les sommes doubles à indices indépendants, on a :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

Remarque 5.3 : On somme en fait sur $I \times J$, où $I = [1, n]$ et $J = [1, p]$.

Remarque 5.4 : Si $p = n$, on peut écrire aussi cette somme de la manière suivante :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}$$

Exercice 12. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij$ en fonction de n .

Exercice 13. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$.

V. B Exemple de somme double à indices dépendants

Si on utilise deux indices (ou plus) pour indexer des nombres, il se peut que les bornes d'un indice dépende des autres indices. Exemple :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij}$$

Dans cet exemple, les a_{ij} forment un triangle :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ & & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \\ & & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On dit que la somme est *triangulaire*.

On pourra aussi écrire cette somme double sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{ij}$$

Proposition 5.5

Pour les sommes triangulaires, on a l'égalité suivante :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}$$

Remarque 5.6 : En effet la première somme correspond à sommer les sommes des lignes du triangle précédent, la seconde à sommer les sommes des colonnes.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k}$.

Exercice 15. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

V. C Produits de sommes

Proposition 5.7

Soient p et q deux entiers naturels, et deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$, alors on a :

$$\left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{j=1}^q b_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_i b_j$$

Exercice 16. Calculer $\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} 2^{i+j}$.

IV Résolution d'un petit système linéaire dans le cas général

IV. A Opérations élémentaires

Définition 4.1

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** d'un système (S) toute transformation du système (S) en un système (S') consistant en :

- **L'échange de deux lignes**

On permute les lignes L_i et L_j , opération notée $L_i \leftrightarrow L_j$.

- **La multiplication d'une ligne par un réel non nul**

On remplace la ligne L_i par a fois la ligne L_i avec $a \neq 0$, opération notée $L_i \leftarrow aL_i$.

- **L'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne**

On ajoute à la ligne L_i b fois la ligne L_j avec $i \neq j$, opération notée $L_i \leftarrow L_i + bL_j$.

Remarque 4.2 : On admet aussi comme opération élémentaire l'opération obtenue en combinant les deux dernières opérations : $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ avec $a \neq 0$, et $i \neq j$.

Exemple 4.3 : On considère le système (S)
$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -6. \end{cases}$$

Effectuer successivement sur ce système les opérations élémentaires suivantes : $L_1 \leftrightarrow L_3$, $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$, et $L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2$.

Remarque 4.4 : Si l'on a effectué une opération élémentaire transformant le système (S) en le système (S') , on peut retrouver le système (S) en effectuant une nouvelle opération élémentaire au système (S') (appelée **opération inverse**).

Proposition 4.5

Toute opération élémentaire transforme un système (S) en un système (S') **équivalent**.

Théorème 4.6

Grâce à des opérations élémentaires, on peut transformer tout système linéaire (S) $n \times p$ (avec $n \leq p$) en un système équivalent (S') qui est échelonné (auquel s'ajoutent éventuellement des équations du type $0 = \text{constante}$).

IV. B Méthode du pivot de Gauss

Ainsi, on peut toujours se ramener à un système échelonné que l'on sait résoudre. Pour se faire, on utilise la méthode suivante dite du "pivot de Gauss" (ou algorithme de Gauss).

On souhaite résoudre le système : (S_1)
$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$$

1. On multiplie éventuellement certaines lignes par un coefficient non nul ($L_i \leftarrow aL_i$) pour simplifier les équations. Ici on fait $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$. On a alors

$$(S_1) \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

2. On veut que le coefficient de x_1 de la première ligne, appelé **pivot**, soit non nul et **le plus simple possible** pour la suite des opérations. On peut échanger des lignes. Ici on fait $L_1 \leftrightarrow L_3$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Lycée Stanislas - Cannes, classes de MPSI & PCSI

Programme officiel. Le programme des deux années en ITC a pour objectif de vous donner des bases en algorithmique et d'avoir une vue d'ensemble des enjeux en informatique. Il est important de mettre en pratique les différentes notions que nous allons aborder. Pour cela le langage Python a été choisi. L'objectif n'est pas de devenir un expert en Python, et d'ailleurs la plupart des fonctions Python ne sont pas autorisées aux concours.

Vous allez également retrouver la programmation à d'autres moments de votre parcours en CPGE : en physique-chimie, en SI, parfois en maths, et en TIPE. La plupart du temps, ce sera avec du Python mais d'autres langages pourront être vus à cette occasion.

Matériel et logiciel Je recommande fortement d'avoir son propre ordinateur, PC ou Mac mais pas un Chromebook, ni une tablette. Pour Python, il n'est pas utile d'avoir un ordinateur très puissant. Vous pouvez utiliser votre système préféré : Linux, Windows ou macOS. Par exemple, sur un vieil ordinateur, vous pouvez installer une version légère de Linux et il sera largement suffisant pour l'informatique.

Pour certains concours, Pyzo est utilisé avec Python3. Sur le site de Pyzo est bien indiqué comment installer Pyzo avec Python. En général Python est déjà installé sur Mac ou Linux. Il faut une version à partir de Python 3. Sinon, vous pouvez installer Thonny (<https://thonny.org>), il s'agit de l'installation la plus simple. Spyder est également très bien, et pour les experts vous pouvez garder votre IDE habituel (Vscode, Pycharm, Idle ...). Je déconseille l'utilisation d'outils de programmation en ligne (seule possibilité pour les utilisateurs de Chromebook et de tablettes).

Informatique au Lycée. Dans votre parcours au lycée, vous devriez avoir vu des bases en Python et en algorithmique : en SNT, en cours de maths, en cours de physique, éventuellement en NSI pour ceux qui ont suivi cette spécialité. Voici les notions que vous avez abordées en Lycée :

- Types usuels : entiers, flottants, chaînes de caractères. Opérateurs `+`, `-`, `*`, `**`, `//`, etc.
- Notion de variables informatiques. Le symbole `=` n'est pas symétrique !
- Notion de fonction en informatique. Arguments, valeur de retour.
- Instruction conditionnelle `if`.
- Boucles `for` et `while`. Algorithme de seuil. Algorithme dichotomique.

Nous reverrons ces notions, mais rien ne vous empêche de les réviser cet été.

Travaux d'été. Les travaux qui suivent sont à faire **sans IA**. Vous pouvez les faire sans ordinateur, mais une calculatrice sera la bienvenue, ainsi qu'une table des caractères avec leur codage ASCII.

Juillet

Le langage Python étant un langage de haut niveau, on ne comprend pas très bien comment les objets sont mis dans la mémoire. Cependant, comprendre l'implémentation des objets en mémoire permet de bien comprendre des notions assez fines comme la mutabilité, et le temps plus ou moins long pour accomplir certaines tâches.

Deux pages plus loin, j'ai reproduit le contenu d'une mémoire contenant 256 octets. Un octet s'écrit à l'aide de deux chiffres en hexadécimal, un chiffre étant un caractère parmi 0123456789ABCDEF. Ainsi "A" correspond au chiffre 10, "B" à 11 et ainsi de suite jusqu'à "F" qui est le chiffre correspondant au nombre 15. Un octet correspond également à un nombre entre 0 et 255. Pour retrouver ce nombre à partir de l'écriture hexadécimale, il suffit de multiplier le chiffre de gauche par 16 et ajouter celui de droite. Par exemple le nombre qui s'écrit en hexadécimal "2A" correspond à $2 \times 16 + 10 = 42$.

Chaque case de la mémoire, dans mon modèle, possède à la fois une adresse qui s'écrit avec deux chiffres en hexadécimal, et un contenu qui s'écrit également à l'aide de deux chiffres en hexadécimal.

Par exemple, la première ligne de mon tableau (après la ligne avec les chiffres de 0 à F) correspond aux adresses de 00 à 0F. La seconde ligne contiendra les cases dont l'adresse est entre 10 et 1F.

Les objets sont écrits dans la mémoire les uns après les autres, en commençant par la case 00 puis en continuant à remplir le tableau de la même façon que l'on écrit des lignes sur une feuille.

Les objets prennent un nombre de cases variable, mais au minimum, dans mon modèle, il prennent deux cases. Je rappelle qu'une case correspond à un octet.

Voici, en fonction du type de l'objet, comment ils sont codés en mémoire :

Numéro du type	taille en octet	valeurs (datas)	suite ...
1 (entiers positifs)	taille (octets)	valeurs en base 256	
2 (flottants)	valeurs sur 8 octets (64 bits)		
3 (listes)	Nombre d'éléments	adresse corps de liste	
4 (chaîne de caractères)	taille (octets)	caractères	...
5 (tuple)	taille (octets)	adresse objets	...
6 (dictionnaire)	taille (octets)	valeurs	...
7 (Corps de liste)	taille (octets)	adresses objets	...
...			

On voit donc que la première case donne le type de l'objet et en général la seconde case donne le nombre d'octets utilisés pour stocker les données. Cela est vrai pour tous les objets sauf les listes, qui sont codées en deux morceaux, pas forcément côte à côte. Le premier morceau est composé toujours de 3 octets (3 cases), le premier étant "03", le second le nombre d'éléments de la liste (codé en hexadécimal) puis l'adresse où se trouvent les adresses des objets dans la liste. Le second morceau est appelé un corps de liste, et il utilise souvent une place supérieure au nombre d'éléments de la liste, afin de pouvoir accueillir de nouveaux éléments sans avoir à déménager.

En ce qui concerne les entiers positifs, ceux-ci sont codés en base 256. Ainsi le nombre entier 43981 sera codé sur 4 cases : 01 (entier) – 02 (nombre de cases utilisées après) – AB – CD. En effet "AB" correspond au nombre 171, "CD" correspond au nombre 205 et $171 \times 256 + 205 = 43981$.

Pour les chaînes de caractères, on utilise le code ASCII afin de coder les lettres. Vous pouvez trouver le détail du code très facilement, mais pour information, la lettre "A" correspond à l'hexadécimal "41", la lettre "Z" correspond à "5A", "a" correspond à "61" et "z" à "7A".

Seuls ces trois types d'objets seront utilisés pour la question que je vous pose :

Quelle est la valeur de la liste qui est à l'adresse 3B ?

PS : on écrira les objets et non leur adresse.

PS2 : L'écriture usuelle d'une liste est avec des crochets : [obj1, obj2, ...].

État de la mémoire : 256 octets

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	04	11	64	65	20	53	6F	70	68	69	65	20	47	65	72	6D
1	61	69	6E	04	03	73	FB	72	04	02	65	74	01	02	07	EB
2	01	02	03	FF	04	15	65	73	74	20	75	6E	20	6E	6F	6D
3	62	72	65	20	70	72	65	6D	69	65	72	03	07	3E	07	09
4	1C	24	13	18	20	24	00	00	00	04	66	4C	61	20	63	75
5	72	69	6F	73	69	74	E9	20	65	73	74	20	75	6E	20	76
6	69	6C	6C	61	69	6E	20	64	E9	66	61	75	74	20	6D	61
7	69	73	20	70	61	73	20	65	6E	20	63	6F	75	72	73	2E
8	20	43	65	74	74	65	20	70	61	72	74	69	65	20	64	65
9	20	6C	61	20	6D	E9	6D	6F	69	72	65	20	6E	65	20	76
A	6F	75	73	20	73	65	72	76	69	72	61	20	70	61	73	20
B	21	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
C	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
D	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
E	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
F	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00

Août

Avec combien de multiplications au minimum peut-on calculer A^{10} ? Supposons par exemple que A est une matrice de grande taille et que cela est vraiment pénible de multiplier deux matrices. On cherche alors à minimiser ce coût.

On peut faire $A_2 = A \times A$, puis $A_3 = A_2 \times A$, $A_4 = A_3 \times A$, etc., jusqu'à $A_{10} = A_9 \times A$ ce qui fait 9 multiplications.

Mais on peut aussi calculer $A_2 = A \times A$, $A_3 = A_2 \times A$ puis $A_5 = A_2 \times A_3$ et enfin $A_{10} = A_5 \times A_5$. Cette fois-ci on a calculé seulement 4 multiplications.

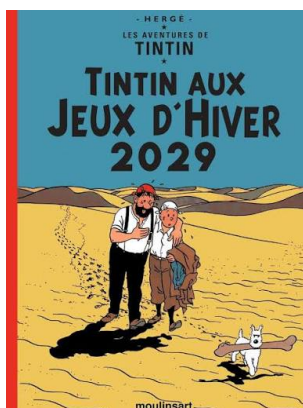
Est-ce possible de faire mieux ? Peut-on le prouver ?

Quel est votre record pour A^{2026} ?

Envoyez vos réponses par courriel avec le nom de votre filière (MPSI ou PCSI). Vous mettrez comme sujet "Devoir été" ou bien "Devoir été juillet" ou bien "Devoir été Août" .

Bonnes vacances,

Emmanuel Volte
evolte@stanislas-cannes.com



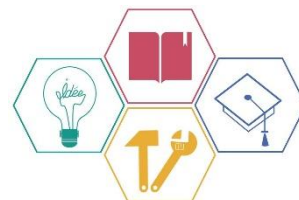
Consignes de rentrée CPGE MPSI

- Sciences Industrielles pour l'Ingénieur (SII) –

Félicitations pour votre choix d'intégrer la MPSI et bienvenue à Stan'.

Pour bien démarrer l'année, vous devrez arriver bien reposés et en forme.

Mais avant cela, un peu de travail s'impose pendant les vacances estivales si vous ne voulez pas être débordés par le rythme. Pour préparer sereinement votre rentrée, vous trouverez ci-dessous quelques informations utiles.



I. Les fournitures

Le cours de SII sera distribué sous forme de photocopiés recto verso à compléter.

La liste du matériel spécifique à acquérir est donc la suivante :

- Un système de classement laissé libre (classeur, porte-vues, baguettes de reliure, ...)
- Des feuilles doubles ou cahier pour vos corrections d'exercices
- Un cahier de brouillon ou des feuilles de brouillon
- Des crayons de couleur (une dizaine de couleurs différentes, vous pouvez reprendre ceux de vos années précédentes ou de votre jeunesse sans aucun problème).
- Un petit cahier A7 entre 50 et 100 pages pour noter les points de culture générale.
- Une clé USB > 8 Go renommée avec votre nom de famille qui sera aussi utile pour les autres disciplines
- Un agenda ou cahier de texte ou autre système au choix pour noter les exercices à effectuer pour la prochaine séance

Veuillez noter que certaines épreuves écrites de SII se déroulent sans calculatrice et d'autres ont des calculs relativement simples pour arriver à un ordre de grandeur. La calculatrice n'est donc pas forcément un avantage de temps, il est donc possible de réutiliser sa calculatrice de lycée pour la SII.

II. Quelques conseils pour bien préparer sa rentrée

- Réfléchir à une organisation de travail pour être prêt dès la rentrée.
- Utiliser le temps des vacances pour pallier les éventuelles lacunes en Mathématiques (notamment les chapitres énoncés ci-après).
- Se préparer avec le **Devoir Maison obligatoire** en fin de document.
- Se reposer et faire le plein d'énergie pour aborder l'année dans de bonnes conditions.

Les Sciences Industrielles de l'Ingénieur (SII) que je vous présenterais à la rentrée, utilisent de nombreux concepts mathématiques et physiques pour étudier les systèmes qui nous entourent. Des révisions et consolidations en Mathématiques sont vivement conseillées avant la rentrée. Il convient de bien maîtriser les bases du lycée et de revoir plus précisément les chapitres suivants :

- **Géométrie plane** : vecteur directeur d'une droite, expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires.
- **Géométrie vectorielle** : caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires, vecteurs coplanaires, décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires, repérage, représentation paramétrique d'une droite.

Pour une révision plus ludique : <https://sites.google.com/view/newecligne/math%C3%A9matiques?authuser=0>

- **Produit scalaire** : produit scalaire dans le plan (calcul du produit scalaire de deux vecteurs par différentes méthodes : projection orthogonale, analytiquement, à l'aide des normes et d'un angle), produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace (définition, propriétés), vecteur normal à un plan, applications du produit scalaire (calculs d'angles et de longueurs).
- **Trigonométrie** : cercle trigonométrique, radian, mesure d'un angle orienté, formules trigonométriques.
- **Dérivation** : nombre dérivé d'une fonction en un point, tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point, fonction dérivée, dérivées des fonctions usuelles.
- **Second degré** : forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux, équation du second degré, discriminant.
- **Nombres complexes** : forme algébrique, conjugué, équation du second degré à coefficients réels, représentation géométrique, affixe d'un point, d'un vecteur, forme trigonométrique (module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct, notation exponentielle).
- **Fonctions usuelles** : sinus, cosinus, exponentielle, logarithme népérien, logarithme décimal.
- **Limites de fonctions** : limite finie et infinie d'une fonction à l'infini, limite infinie d'une fonction en un point, limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient, asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées.
- **Intégrale** : définition, notation, primitive d'une fonction, calcul d'une intégrale, utiliser le calcul d'intégrale pour déterminer une aire, valeur moyenne.

Il est aussi recommandé de bien connaître les nombreuses formules de Physique démontrées au lycée.

III. Manuels

Des exercices d'entraînement et des QCM de révision seront couramment distribués et mis à disposition. Pour ceux qui souhaitent utiliser un manuel en complément des cours / TD / TP, je vous conseille de l'acheter plus tard dans l'année scolaire (après avoir pris connaissance du contenu et des attentes de la matière ainsi que de ceux déjà disponibles dans la bibliothèque). Ces livres peuvent se racheter d'occasion dans des librairies spécialisées ainsi qu'auprès de nos anciens élèves ayant récemment intégré une école d'ingénieur.

Voici une liste d'ouvrages très proches du nouveau programme en vigueur à la rentrée.

Attention, il y a eu un changement de programme en 2021



Sciences industrielles de l'ingénieur MPSI PCSI PTSI Tout-en-un ou autre de la collection

Auteurs : Caignot, Crespel, Violeau

Parution : 07/2021 ou 07/2022, Editeur : VUIBERT



Sciences industrielles pour l'ingénieur MPSI MP2I PCSI – Programme 2021 - 3^{ème} édition

Auteurs : Beynet, Collignon, Durant, Laumenier, Tourvielle

Parution : 05/2021, Editeur : Ellipses



Sciences industrielles de l'ingénieur MPSI MP2I PCSI Tout-en-un ou autre de la collection

Auteurs : Mosser, Marchandeau, Tanoh, Brodelle

Parution : 27/10/2021, Editeur : Dunod

IV. Logiciels

Vous allez être amenés à utiliser, entre autres, le logiciel Solidworks au cours de l'année dans le cadre de projets. Ce logiciel sera bien sûr à votre disposition sur l'ensemble des ordinateurs du lycée en version complète. Des licences étudiantes sont également proposées de manière gratuite à nos élèves. Vous pouvez d'ores et déjà installer celle-ci sur votre ordinateur personnel si vous le souhaitez (rien d'obligatoire). La démarche d'installation est décrite ici => <https://sites.google.com/site/mecacpge/logiciels/solidworks?authuser=0>

V. Quelques conseils pour bien réussir sa rentrée

- A la rentrée, vous ne serez plus un lycéen, mais un étudiant de CPGE. Votre état d'esprit doit être celui d'un étudiant volontaire, sérieux et concentré en cours, TD et TP, visant l'excellence et l'obtention d'un concours d'entrée aux grandes écoles des plus exigeant.
- A l'issue de chaque cours, TD ou TP, aucune difficulté de compréhension ne doit exister. Pour cela, n'hésitez pas à me poser toute question utile pendant les cours, TD et TP ou bien aller venir me voir en fin de cours ou par email pour des précisions supplémentaires. L'équipe pédagogique sera toujours à votre disposition pour vous aider à comprendre.

VI. Les modalités d'évaluation

a. Cours, TD, construction

- Un devoir surveillé (DS) de mécanique aura lieu le samedi matin en alternance avec les autres disciplines (un planning vous sera transmis et affiché dans votre salle). Ce DS noté permettra de vous évaluer sur le cours, les TD de mécanique et les compétences développées en TP.
- Des interrogations de cours régulières, notamment au retour des vacances, vous permettront de vous situer régulièrement concernant l'acquisition de la théorie

b. TP, Projet

- A l'issue de chaque séance de travaux pratiques (TP), un compte-rendu avec documents réponses sera rédigé par chaque groupe et ramassé par le professeur pour vérification du travail fourni et des acquis des étudiants. Ce compte-rendu donnera lieu à une note de TP.
- Vous aurez à mener plusieurs projets durant l'année qui aboutiront à une présentation orale et une notation par votre enseignant ainsi que vos pairs.

Dans l'attente de vous rencontrer, je vous souhaite une belle rentrée et première année de CPGE fructueuse.

Marianne PROT

mprot.sii@gmail.com

Devoir maison pour une rentrée en MPSI

Afin de vous préparer au mieux à cette rentrée en MPSI, il vous est proposé ci-après un QCM de synthèse **obligatoire** qui s'appuie sur un sujet de concours.

QCM Synthèse Lycée->MPSI

Le questionnaire est au format numérique disponible sur le lien suivant :

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeKMvh086h5fOSNGOB9fcd4Efalpo5Tda6lfcttQAP3B0De5g/viwwform?usp=sf_link

Les différentes parties sont indépendantes.

Comptez 1 à 2 heures de travail pour le réaliser avec du brouillon à côté.

Plusieurs réponses peuvent être vraies pour une même question.

Aucun travail en groupe n'est autorisé. Toute suspicion de travail non personnel sera fortement pénalisée.

La date limite de rendu est fixée au **28 aout à 18h**

Le score final vous permettra de vous situer à titre indicatif et ne présage en rien de votre évolution future dans cette discipline.

Vos résultats me permettront également de situer mes futurs étudiants avant la rentrée pour adapter mes enseignements afin de vous aider avec bienveillance à accomplir vos objectifs, atteindre le meilleur de vous-même et entreprendre avec réussite votre carrière professionnelle.

Bon courage
Marianne PROT
mprot.sii@gmail.com

MPSI/PCSI

Cours de Lettres-Philosophie – C. Calvia

Le thème retenu pour les concours 2026/2027 est : **Les arcanes de la création**. L'étude de ce thème s'appuiera sur les œuvres suivantes :

- PLATON, *Ion* + *La République* (Livre X, 595a-608b)
Édition prescrite : GF Prépas scientifiques 2026. Trad. Canto/Leroux
- Emile ZOLA, *L'œuvre*
Édition prescrite : GF Prépas scientifiques 2026.
- Virginia WOOLF, *Un lieu à soi*
Édition prescrite : Folio Classique. Trad. Marie Darrieussecq



1. Il est indispensable de **lire intégralement et activement** ces œuvres durant l'été. Prenez des notes au fil de vos lectures, relevez quelques citations qui vous paraissent intéressantes et commencez à vous interroger sur le thème de la création artistique : inspiration ou travail ? maîtrise ou dépossession ? Rapport de l'œuvre au réel ?...

Les dossiers / préfaces / postfaces qui accompagnent les œuvres au programme peuvent également vous fournir de précieux renseignements et vous aider à aborder le thème imposé.

2. Le site *Magister* vous propose plusieurs liens vers des ressources utiles à la compréhension de ces trois œuvres : biographies, présentations, essais, articles ainsi que des podcasts France Culture que vous pouvez écouter quand vous êtes en déplacement. C'est à cette adresse : <https://www.site-magister.com/prepas/page8.htm>.

3. Les rapports de jury soulignent régulièrement l'importance de la **maîtrise de la langue**. Vous ne pouvez pas réussir un résumé ni une dissertation (les deux épreuves qui vous attendent aux concours) si vous ne maîtrisez pas parfaitement la syntaxe, le vocabulaire, l'orthographe... Profitez de l'été pour revoir les règles essentielles de la grammaire française. Un manuel du secondaire peut suffire. Il existe aussi des ouvrages spécifiques comme celui-ci : *20 minutes d'orthographe par jour*, K. Ueltschi, Ellipses, qui peuvent s'avérer utiles.

Bonne lecture et bel été à tous !

A. Tenir un logbook

Tout au long de l'été, maintenez et renforcez votre anglais et votre connaissance du monde anglo-saxon en variant les supports : articles de presse, films, séries, podcasts... Tenez un journal de bord (*logbook*) - de préférence un carnet papier, mais un format numérique convient aussi.

Pour chaque ressource utilisée, rédigez librement une entrée dans votre logbook :

- la date et la ressource utilisée (nature, titre)
- quelques idées clés ou impressions personnelles
- au moins 5 mots ou expressions que vous ne connaissiez pas

Objectif minimum : 2 ressources par semaine, sur les 8 semaines de vacances

(6 juillet – 30 août 2026), soit **au moins 16 entrées au total**. L'organisation est libre : 2 par semaine en continu, 4 sur 4 semaines, 3 sur 6... à adapter selon vos contraintes.

L'idée n'est pas de vous imposer une tâche supplémentaire, mais d'intégrer ces activités à votre quotidien, au même titre que le sport, la musique, ou toute autre pratique que vous entretenez régulièrement.

Ce journal n'a pas vocation à être évalué — il est avant tout un outil pour vous, un espace de progression personnelle que vous serez amenés à enrichir tout au long de l'année.

Voici les ressources que vous pouvez utiliser :

1. La presse en ligne

Suivez l'actualité quotidiennement. Abonnez-vous aux comptes de ces journaux sur les réseaux sociaux pour les intégrer à votre quotidien. *Titres **en gras** : accès libre.*

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| ▸ The Economist | ▸ <u>The Guardian</u> |
| ▸ Le Monde Diplo (English Ed.) | ▸ The New York Times |
| ▸ <u>The Conversation</u> | ▸ <u>BBC News</u> |
| ▸ <u>NPR</u> | ▸ <u>PBS News</u> |
| ▸ The Washington Post | ▸ <u>CNN10</u> |

2. Films, séries & documentaires (VO)

À regarder en version originale avec les sous-titres en anglais. → **Voir liste de suggestions en annexe.**

3. Podcasts & conférences

Actualité

- [Today, Explained](#) – Vox's daily news explainer
- [The Documentary Podcast](#) – BBC World Service

Divers

- [TED Talks](#) — Les TED talks sont des modèles de prise de parole en public en anglais : des idées complexes, exposées clairement, par des experts qui savent captiver. C'est à la fois un entraînement à l'écoute et une leçon de communication.

4. Roman ou audiobook (VO)

Choisissez un roman à lire ou un audiobook à écouter durant l'été. Notez vos impressions et votre progression dans le logbook. → **Voir suggestions en annexe.**

B. 📖 Short stories — Ted Chiang

Deux nouvelles de science-fiction à lire et écouter avant la rentrée (obligatoire).

📄 À lire

[Exhalation](https://www.lightspeedmagazine.com/fiction/exhalation/)

<https://www.lightspeedmagazine.com/fiction/exhalation/>

🎧 À écouter

[The Merchant and the Alchemist's Gate](https://www.youtube.com/watch?v=9VYXqBW4ink)

<https://www.youtube.com/watch?v=9VYXqBW4ink>

C. ✎ Thème grammatical

Vous devez réviser **18 points de grammaire** à travers **180 phrases de thème grammatical autocorrigées** (obligatoire).

Organisation du travail

Chaque série de **10 phrases** correspond à **un point de grammaire précis** — les phrases doivent être réalisées **par lots complets de 10 minimum**. Une fois les phrases traduites, vérifiez en autonomie le corrigé fourni.

Exemples de répartition :

- ▶ 6 semaines à 20 phrases + 2 semaines à 30 phrases
- ▶ 6 semaines à 30 phrases si vous préférez garder 2 semaines sans travail

L'important est d'atteindre les 180 phrases au total.

Dans votre logbook

Après chaque séance, notez : la date, le nombre de phrases réalisées, le ou les points de grammaire révisés.

Ressources

Les exercices et corrigés se trouvent dans le manuel « *Tout l'anglais aux concours* » à partir de la page 41 (voir ci-dessous). Ils sont également accessibles en ligne :

→ [18 points de grammaire en autonomie \(exercices + corrigés\)](#)

📘 Manuel à acquérir

« *Tout l'anglais aux concours* » — Eddy Chevalier & Mathias Degoute
Armand Colin, 3^e édition (2024)

⚠️ À la rentrée, 3 QCM seront organisés :

- ▶ **QCM sur l'actualité** — portant sur les événements saillants de l'été dans les pays anglophones
- ▶ **QCM de grammaire** — phrases tirées du corpus de thème travaillé pendant l'été à traduire
- ▶ **QCM de lecture** — portant sur les deux nouvelles de Ted Chiang (*Exhalation* et *The Merchant and the Alchemist's Gate*)

See you in September ! 🌻

J. Sinègre (MPSI)

jsinegre@stanislas-cannes.com

M. Sayada (PCSI)

mbagheritari@stanislas-cannes.com

ANNEXE 1 — FILMS & SÉRIES RECOMMANDÉS

À regarder en version originale avec les sous-titres en anglais. Disponibles sur les plateformes courantes (Prime Video, Netflix, Canal+, YouTube...) ou en médiathèque.

Séries — Civilisation américaine

Titre	Réalisateur	Année	Thème / contexte
Mad Men	Matthew Weiner	2007	Changements sociaux et moraux dans l'Amérique des années 1960
Mrs. America	Dahvi Waller	2020	Mouvement féministe et conservateur dans les années 1970
House of Cards	David Fincher	2013	Système politique américain
The Diplomat	Debora Cahn	2023	Relations internationales

Films — Civilisation américaine

Titre	Réalisateur	Année	Thème / contexte
12 Years a Slave	Steve McQueen	2013	Esclavagisme aux États-Unis, années 1840
Dances with Wolves	Kevin Costner	1990	Guerre de Sécession, frontière américaine, Sioux
The Untouchables	Brian De Palma	1987	Prohibition, années 1930, Al Capone, Chicago
Saving Private Ryan	Steven Spielberg	1998	Seconde Guerre mondiale, débarquement de Normandie
Hidden Figures	Theodore Melfi	2016	Femmes afro-américaines et conquête spatiale, années 1960
Mississippi Burning	Alan Parker	1988	Mouvement des droits civiques, 1964
Good Morning Vietnam	Barry Levinson	1988	Guerre du Vietnam
The Trial of the Chicago 7	Aaron Sorkin	2020	Manifestations anti-guerre du Vietnam, fin des années 1960
Apollo 13	Ron Howard	1995	Mission spatiale américaine, 1970
The Immigrant	James Gray	2013	Immigration aux États-Unis dans les années 1920
Brooklyn	John Crowley	2015	Immigration irlandaise aux États-Unis dans les années 1950
The Butler	Lee Daniels	2013	Civilisation américaine de 1957 à 1986
Forrest Gump	Robert Zemeckis	1994	Civilisation américaine de 1951 à 1981
Pentagon Papers	Steven Spielberg	2018	Journalisme américain, 1971, avant le Watergate
The Namesake	Mira Nair	2007	Immigration, culture indienne aux États-Unis
The Visitor	Tom McCarthy	2008	Immigration aux États-Unis post 11 septembre 2001

Séries — Civilisation britannique

Titre	Réalisateur	Année	Thème / contexte
The Crown	Peter Morgan	2016	Monarchie britannique depuis 1947
Derry Girls	Michael Lennox	2018	Comédie — conflit nord-irlandais, début des années 1990
Years and Years	Russell T Davies	2019	Dystopie — montée du populisme, 2019–2034

Films — Civilisation britannique

Titre	Réalisateur	Année	Thème / contexte
Braveheart	Mel Gibson	1995	Fin du XIII ^e siècle, indépendance écossaise
Suffragette	Sarah Gavron	2015	Mouvement pour le droit de vote des femmes, 1912
The King's Speech	Tom Hooper	2010	George VI, 1925–1939
Hope and Glory	John Boorman	1987	Seconde Guerre mondiale côté civil britannique
Imitation Game	Morten Tyldum	2014	Alan Turing, 2 ^e Guerre mondiale
Dunkirk	Christopher Nolan	2017	Opération Dynamo, 1940
Darkest Hour	Joe Wright	2017	Winston Churchill
Gandhi	Richard Attenborough	1982	Indépendance de l'Inde

Titre	Réalisateur	Année	Thème / contexte
Billy Elliot	Stephen Daldry	2000	<i>Grève des mineurs sous Thatcher, années 1980</i>
Dirty Pretty Things	Stephen Frears	2003	<i>Immigration clandestine à Londres</i>
The Angels' Share	Ken Loach	2012	<i>Déterminisme social, Écosse</i>

Films — Pays du Commonwealth

Titre	Réalisateur	Année	Thème / contexte
The Revenant	A. G. Iñárritu	2015	<i>Canada — commerce de la fourrure, trappeurs</i>
Gallipoli	Peter Weir	1981	<i>Australie — 1^{re} Guerre mondiale, Dardanelles</i>
Australia	Baz Luhrmann	2008	<i>Générations volées, bombardement de Darwin (1942)</i>
Rabbit-Proof Fence	Philip Noyce	2002	<i>Australie — générations volées, 1905–1967</i>
Invictus	Clint Eastwood	2009	<i>Afrique du Sud — Nelson Mandela, Coupe du monde de rugby 1995</i>
District 9	Neill Blomkamp	2009	<i>Afrique du Sud — apartheid (uchronie 1982)</i>
Once Were Warriors	Lee Tamahori	1994	<i>Famille maorie dans la banlieue d'Auckland, Nouvelle-Zélande</i>

ANNEXE 2 — ROMANS & AUDIOBOOKS RECOMMANDÉS

Sélection de romans et audiobooks en version originale. Ebooks gratuits : gutenberg.org · Audiobooks gratuits : librivox.org

Titre	Auteur	Thème / niveau
The Hunger Games	Suzanne Collins	<i>Dystopie, survie, pouvoir — B2-C1</i>
Noughts and Crosses	Malorie Blackman	<i>Inégalités, dystopie — C1</i>
The Hate U Give	Angie Thomas	<i>Justice sociale, identité — B2-C1</i>
A Good Girl's Guide to Murder	Holly Jackson	<i>Policier, mystère — B2-C1</i>
Becoming	Michelle Obama	<i>Autobiographie, identité américaine — C1</i>
Surely You're Joking, Mr. Feynman!	Richard Feynman	<i>Autobiographie scientifique, humour — C1</i>
The Martian	Andy Weir	<i>Science-fiction, survie sur Mars — C1</i>
Flowers for Algernon	Daniel Keyes	<i>Neurosciences, éthique, identité — C1</i>
1984	George Orwell	<i>Dystopie, langue et pouvoir — C1-C2</i>

ESPAGNOL, CPGE SCIENTIFIQUE MPSI/PCSI

Enseignante : Madame Pilch

En choisissant de poursuivre l'apprentissage de cette matière, vous enrichirez votre culture générale, et vous approfondirez des thématiques d'actualité diverses concernant le monde hispanique, à partir de supports variés (articles de presse, extraits de documents audio et vidéo). Cela peut constituer une valeur ajoutée dans un contexte où la dimension internationale est importante.

Vous continuerez à travailler les activités langagières que vous connaissiez depuis l'enseignement secondaire, mais à un niveau supérieur et avec des repères culturels qui permettront de comprendre les enjeux politiques, économiques et sociétaux des différents pays étudiés.

Les cours viseront à :

1° Approfondir les connaissances en grammaire et conjugaison : QCM de grammaire (temps du passé, subordonnées, concordance des temps, prépositions, pronoms...). Vous pouvez vous aider d'une grammaire. Par exemple :

Maîtriser la grammaire espagnole. Hatier, 2023.

2° Enrichir votre lexique à travers les différents documents étudiés, et les exercices proposés en cours. Vous aurez des QCM de lexique. Pour les étudiants désireux d'approfondir leurs connaissances, à titre indicatif, vous pouvez consulter les manuels suivants (nulle obligation d'achat) :

Du mot à la phrase, vocabulaire espagnol contemporain. Hélène Moufflet, Ellipses.
Vocabulaire de l'espagnol. Collection Robert&Nathan.

3° Travailler la compréhension de l'écrit et l'expression orale en continu et en interaction, à partir de l'étude de textes portant sur des sujets d'actualité, et lors des interrogations orales (khôlles).

-Vous pouvez consulter en ligne les journaux tels que :

<https://www.elpais.com>

<https://www.elmundo.es>

<https://www.lavanguardia.com>

<https://www.clarin.com>

-Vous pouvez avoir accès à la télévision espagnole :

<https://www.rtve.es>

Outre les actualités, vous avez la possibilité de voir des séries, selon vos goûts, qui permettent aussi d'enrichir vos connaissances linguistiques.

Trabajos de verano :

Es imprescindible, antes de iniciar el curso 2026-2027, repasar la conjugación, consolidar las bases gramaticales y léxicas, y adquirir nociones básicas sobre la actualidad española e hispanoamericana (Por ejemplo ver quién es el presidente tanto en España como en los países hispanoamericanos, las tendencias políticas, de izquierdas, de derechas, política de represión...)

Así que este verano todos los estudiantes tendrán que hacer lo siguiente:

- 1) Estudiar la conjugación (modos indicativo y subjuntivo, verbos regulares e irregulares)
- 2) Consolidar la gramática.
- 3) Realizar el test de opción múltiple (QCM), **justificando cada respuesta con su regla de gramática.**
- 4) Estar al tanto de la actualidad española e hispanoamericana leyendo la prensa (*El país, El Mundo...*) o yendo al portal de televisión RTVE (telediario, reportajes...)

Test de opción múltiple (QCM) :

- 1) ¿Qué hiciste el domingo pasado?
- Como no..... con nadie, estuve en casa viendo una película.
a) quedaba b) había quedado c) quedara d) hubiera quedado
- 2) ¿Quiere que lo traiga?
a) le b) se c) te d) os
- 3) -Al final, nos hemos quedado sin entradas para el teatro.

-Lo dices como si yo.....la culpa.

a) tenía b) tengo c) tenga d) tuviera

4) Los niños que cumplir con sus obligaciones.

a) deben b) hay c) tienen d) han

5) Si ahora yo tuviera el dinero suficiente, meuna casa.

a) compro b) compraría c) compraré d) habría comprado

6) La situación financiera de su empresa no es.....opulenta.....parece

a) tanto/como b) tan/que c) tan/como d) tanto/que

7) Como te lo dije, lo haré demanera.

a) cualquiera b) cualquier c) algún d) una otra

8) prohibido.....entrar por esta puerta

a) es/ø b) es/de c) está/ø d) está/de

9) Es posible que todo..... bien.

a) ha salido b) salía c) sale d) haya salido

10) Pasé el verano en España porque.....mejorar el español.

a) necesito de b) necesitaba a c) necesitaba de d) necesitaba

11)que lo intente, no podré recordar dónde he puesto las llaves.

a) por muy b) por mucho c) por menos d) a menos

12) Hablaba.....

a) normalmente y claramente b) fuertemente y claramente c) lentamente y claramente d) lenta y claramente.

13) Me extraña que este artista no.....mayor éxito

a) haya tenido b) haga c) haya d) sea

14) Era preciso cantarle una nueva canción para que.....

a) Se dormiera b) se durmiera c) se duerma d) se duerme

15) Es suaño de trabajo.

a) primero b) postrero c) primer d) tercero

16) Fue en junio.....nos vimos por última vez.

- a) en cuando b) cuándo c) que d) cuando
- 17) Es el libro..... fácil leer
a) más/a b) el más/de c) menos/de d) menos/por
- 18) A mí dan bien las matemáticas.
a) se me b) me c) ø d) me se
- 19) Le debeneuros.
a) cinco cientos b) dos mil y veinte c) nuevecientos d) quinientos
- 20) Se quedaron atónitostal espectáculo.
a) delante b) detrás de c) adelante d) ante
- 21)que implementen nuevas medidas.
a) hay b) tienen c) necesitan d) hace falta
- 22) Aquel día mi padre nobromas.
a) era por b) fuera para c) se sentía para d) estaba para
- 23) Aencantan las noticias.
a) nosotros b) tú te c) ellos se d) ellos les
- 24) Lleva ya varios mesesverlos y los echa.....menos.
a) sin/de b) al/de c) con/por d) por /que
- 25) Es preciso que se lo.....de nuevo.
a) explicáis b) explican c) expliquéis d) explicasen
- 26) ¿..... número de teléfono de la oficina?
a) Recuerdas del b) Acuerdas c) Te acuerdas del d) Te recuerdas del
- 27) No sabe explicar biende las cosas.
a) el porqué b) porque c) por que d) por qué
- 28) No pienso que los periodistas..... de poder.
a) carezcan b) carecían c) carecen d) carecieran
- 29) La crisis venezolanaun rompecabezas.
a) se ha convertido en b) ha convertido c) ha vuelto en d) se ha convertido

- 30) Ojalá el colapso de los servicios públicos.....evitado.
a) podrá ser b) podría ser c) pueda estar d) pueda ser
- 31) ¿ Tú crees que todos los colombianos.....un cambio de gobierno?
a) estarán deseando que hubiera b) están deseando que hubiera c) están deseando que haya d) están deseando que habrá
- 32) Dos decuatro desempleadosde la construcción.
a) sobre/son b) cada/ están c) cada/son d) por/están
- 33) No vimos.....
a) alguien b) a nadie c) persona d) cualquiera
- 34) El empleado trabaja en esta oficinacuatro años
a) desde b) para c) desde hace d) en
- 35) Parecía mentira que no..... nada de él.
a) sepan b) supieran c) supieron d) saben
- 36) Aseñora Pérez le interesan sus nuevas responsabilidades en el ministerio deEducación.
a) ø/la b) ø/ø c) la/la d) la/ø
- 37) Cuando los emigrantes logran subir..... tren,aliviados.
a) al/están b) al/son b) c) en el/están d) en el/son

Todos los estudiantes tendrán que venir el primer día de clase con los deberes hechos.

Madame, Monsieur,

Je vous souhaite la bienvenue.

Afin de préparer au mieux la rentrée, je vous propose quelques exercices d'entraînement sous forme de QCM et de brèves rédactions que vous devrez me remettre à la rentrée, lors de notre premier cours.

Pendant l'été, révisez le vocabulaire courant que vos professeurs du collège/lycée vous ont transmis et que vous avez utilisé. Révisez les bases grammaticales à l'aide d'une grammaire de qualité.

Commencez dès à présent à vous intéresser à la société italienne via les sites internet de la presse (voir "siti utili" ci-dessous).

Pour toute question, n'hésitez pas à me contacter par mail.

Buona estate e buono studio!

Prof.ssa Elena LUTEROTTI

BIBLIOGRAFIA consigliata

È utile avere (facoltativo, non obbligatorio):

- una **grammatica** di riferimento (una sintesi delle principali regole grammaticali sarà distribuita a lezione).

SITI utili

www.ilpost.it

www.repubblica.it

www.corriere.it

www.lastampa.it

www.rai.it (TV pubblica)

COMPITI PER L'ESTATE

1. Leggere attentamente il testo "Il futuro dell'energia è nelle fonti rinnovabili" e poi scegliere la risposta esatta: **una sola** risposta possibile tra le 4 proposte (la parte grammaticale è indipendente dal testo)
2. Scrivere un riassunto del testo e un breve commento rispondendo alla domanda seguente: questo articolo, scritto nel 2008, è ancora di attualità oggi? Perché?

IL FUTURO DELL'ENERGIA È NELLE FONTI RINNOVABILI

La difficoltà di soddisfare il fabbisogno energetico non è certo l'ultima delle nostre ansie. **Bolletta** più cara, benzina più cara, generale aumento dei prezzi dovuto all'aumento del costo dell'energia, dipendenza dell'Italia dall'estero per il proprio fabbisogno e "nazionalismo energetico" della Russia di Putin, guerra infinita intorno ai pozzi dell'Iraq: ce n'è per tutti. Lo spettro di serbatoi semivuoti e inverni più freddi si è oramai insinuato tra le tante insicurezze quotidiane.

Il carattere ansiogeno della situazione è aggravato dal fatto che al **cruccio** della **scarsità** di petrolio si affianca il cruccio per il consumo di petrolio. Siamo presi tra due fuochi perché vogliamo anche **tutelare** la nostra salute, lottare contro le emissioni nocive, smettere di essere sottomessi a paesi che ci ricattano trovando altre soluzioni. Poco petrolio, insomma, non va bene; molto petrolio, **nemmeno**. Comunque vada, non va.

Se questi sono i dilemmi di noi consumatori, potrà forse consolarci apprendere che non minori sono i dilemmi degli imprenditori dell'energia, **impegnati** in un business che **richiede** investimenti assai **ingenti** in un contesto altamente instabile e con un alto fattore di rischio in un mercato irto di regole complicate, anche se è pur vero che commerciano un bene primario, irrinunciabile e anzi sempre più richiesto.

Prendiamo ad esempio la questione della sicurezza degli **approvvigionamenti**. Negli anni passati questa sicurezza era apparsa in dubbio, tanto che nel 2005 e nel 2006 c'è stata una robusta crescita degli investimenti in infrastrutture, con una diffusa presenza di progetti per nuove centrali nei Paesi membri dell'Unione, per una capacità totale di 190 gigawatt. Secondo l'Ucte (Unione per il coordinamento della trasmissione dell'energia), grazie a queste nuove centrali il sistema si sta strutturando per garantire la sicurezza degli approvvigionamenti almeno fino al 2014-2015. Eppure, questo sforzo per garantire gli approvvigionamenti **cozza** con quello, altrettanto importante, per ridurre le emissioni nocive. Infatti – si legge nello European Energy Markets Observatory – "l'81 per cento delle centrali pianificate utilizzerà combustibili fossili, ed emetterà dunque CO₂. Questo avrà un effetto negativo sulle emissioni europee ed è in conflitto con l'obiettivo della Commissione europea di ridurre del 20 per cento tali emissioni al 2020". **Siamo daccapo**. Tanto più che non solo la produzione, ma anche i consumi aumentano (1,4 per cento), mentre anch'essi, secondo la Commissione, dovrebbero **diminuire** del 20 per cento entro il 2020.

Che fare allora? La strada **additata** è intuitiva: investire in impianti di produzione di energia elettrica da fonti che non presentano il pericolo di esaurirsi. È una direzione che presenta rischi e può essere redditizia, ma è in ogni modo virtuosa per il suo duplice obiettivo di accrescere l'offerta e diminuire le emissioni. I dati del problema sono semplici: entro il 2020 le emissioni di CO₂ nei Paesi membri dell'Unione europea dovranno essere ridotte del 20 per cento rispetto al 1990 e il 20 per cento della produzione di energia dovrà essere basata su fonti rinnovabili. Entro il 31 dicembre del 2010 i singoli governi dovranno presentare un piano di assegnazione degli obiettivi nei settori della produzione di energia elettrica, della produzione di calore e freddo e nei trasporti.

Per quanto riguarda l'Italia, dovremo raddoppiare le fonti rinnovabili. La produzione eolica sarà quella che sarà più potenziata, dopo verrà quella a biomassa e infine quella solare, anche se il buon senso dovrebbe dettarci di invertire l'ordine di queste fonti, vista l'esposizione solare del nostro paese. Esistono da tempo nel nostro paese **incentivi** per chi produce da fonti rinnovabili, con il doppio sistema dei "certificati verdi" e con tariffe fissate dal Ministero per lo sviluppo economico. Non sempre, però, questi incentivi sono competitivi rispetto a quelli offerti in altri Paesi europei. L'eolico offre migliori profitti nel Regno Unito e in Belgio; il fotovoltaico, che è la tecnologia più costosa, non è **redditizio** (potrà diventarlo nei Paesi più assolati, come il nostro, a patto che i costi di investimento possano ridursi); le biomasse sono **convenienti** in Germania più che altrove, ma anche in Italia a determinate condizioni.

PIETRO VERONESE – Roma – La Repubblica 26/05/2008

I. COMPRÉHENSION

Choisissez la réponse qui vous paraît la plus adéquate en vous référant **au texte** :

1. Una delle nostre paure è

- A) Avere inverni troppo caldi a causa del riscaldamento del pianeta
- B) Non poter più scaldarci in inverno per mancanza di petrolio
- C) Avere serbatoi abbastanza pieni senza poterli usare
- D) Avere inverni più freddi perché il riscaldamento del pianeta non esiste

2.

- A) Possiamo consumare il petrolio perché ci sono abbastanza riserve
- B) Non bisogna assolutamente consumare petrolio perché avveleniamo la terra
- C) La dipendenza dai paesi produttori è inevitabile
- D) Abbiamo paura che non ci sia abbastanza petrolio ma anche di inquinare

3. I produttori di energia pensano

- A) Che investire sia molto caro e rischioso
- B) Che non ci sia nessun rischio perché l'energia è indispensabile
- C) Di poter investire come vogliono, basta rispettare le regole
- D) Di poter trarre profitto da un mercato instabile e dai prezzi che sono molto elevati

4. Produrre più energia con combustibili fossili è incompatibile

- A) Con le direttive della commissione europea
- B) Con la difficoltà di approvvigionamenti
- C) Con la difficoltà di fare investimenti nelle centrali
- D) Con la domanda dei consumatori che è in calo

5.

- A) Le fonti di energia che bisogna usare sono quelle che non inquinano
- B) Bisogna scegliere l'energia rinnovabile perché costa di meno
- C) L'energia rinnovabile è una scelta rischiosa ma l'unica che sia giusta
- D) La scelta delle fonti energetiche dipenderà dalle virtù che queste presentano

6.

- A) Il 2020 è la scadenza per presentare i programmi per il risparmio energetico
- B) Il 1990 è l'anno in cui abbiamo consumato più prodotti energetici
- C) Il 2010 è la scadenza per diminuire il consumo di petrolio
- D) Il 2010 è la scadenza per definire le strategie energetiche

7.

- A) L'Italia deve moltiplicare per due l'energia da fonti rinnovabili
- B) In Italia la media di esposizione solare non è poi così elevata
- C) L'energia eolica è l'energia più inquinante
- D) Peccato che non sviluppiamo abbastanza l'energia solare perché è redditizia

8.

- A) L'Italia non aiuta chi vuole produrre energia rinnovabile
- B) Tutti gli altri paesi sono più concorrenziali rispetto all'Italia
- C) L'energia solare è quella meno cara
- D) In Italia l'investimento nella biomassa è abbastanza a buon mercato

II – LEXIQUE

Choisissez la réponse qui, en fonction du contexte, vous paraît la plus appropriée

9. bolletta

- A) francobollo
- B) fattura
- C) bolla
- D) bollettino borsistico

10. cruccio

- A) preoccupazione
- B) difficoltà
- C) situazione cruciale
- D) aspetto

11. scarsità

- A) abbondanza
- B) differenza
- C) insufficienza
- D) dimenticanza

12. tutelare

- A) appoggiare
- B) proteggere
- C) indicare
- D) ricordare

13. nemmeno

- A) eppure
- B) tuttavia
- C) neppure
- D) anzi

14. impegnati

- A) implicati
- B) annoiati
- C) incentivati
- D) impediti

15. richiede

- A) invoglia
- B) rifiuta
- C) sceglie
- D) esige

16. ingenti

- A) considerevoli
- B) contenuti
- C) modici
- D) ridotti

17. approvvigionamenti

- A) rifornimenti
- B) compensazioni
- C) investimenti
- D) bisogni

18. cozza

- A) colloca
- B) piazza
- C) contrasta
- D) concorda

19. siamo daccapo

- A) si ritorna all'inizio
- B) si arriva alla fine
- C) siamo spacciati
- D) siamo i capi

20. diminuire

- A) calare
- B) incrementare
- C) salire
- D) stagnare

21. additata

- A) interdetta
- B) aggiunta
- C) indicata
- D) additiva

22. incentivi

- A) handicap
- B) stimoli
- C) divieti
- D) ostacoli

23. redditizio

- A) adottato
- B) sfruttato
- C) svantaggioso
- D) profittevole

24. convenienti

- A) preferiti
- B) interessanti
- C) comodi
- D) conformi

III – COMPÉTENCE GRAMMATICALE

Les questions suivantes sont indépendantes du texte

25. Ascoltami, il tuo indirizzo

- A) mi dà
- B) me dà
- C) mi dia
- D) dammi

26. È in arrivo qualche

- A) turista belgio
- B) turisti belgi
- C) turista belga
- D) turiste belghe

27. La macchina ... corsa è ... mio fratello

- A) da ... di
- B) di ... da
- C) di ... di
- D) da ... da

28. I ragazzi ... hai incontrato sono

- A) Che ... i miei fratelli
- B) I cui ... i miei fratelli
- C) I quali ... miei fratelli
- D) Con cui ... fratelli miei

29. Avvocato, ... ringrazio e ... auguro ogni bene.

- A) Le ... le
- B) La ... le
- C) Le ... la
- D) La ... la

30. studiare molto se ... fare progressi

- A) Ci vuol ... si vuol
- B) Si devono ... si vuol
- C) Bisogna ... occorrono
- D) Occorre ... si vogliono

31. ... 2024 i tassi sono stati abbassati ... 0,2%.

- A) In ... di
- B) Nello ... dal
- C) In lo ... del
- D) Nel ... dello

32. Ho imparato l'italiano Lo pratico

- A) Tre anni fa ... da tre anni
- B) Tre anni sono ... per tre anni
- C) Fa tre anni ... in tre anni
- D) Tre anni fanno ... fra tre anni

33. Se Roberto ... più sincero, le cose meglio

- A) Fosse ... andassero
- B) Sarebbe ... andrebbero
- C) Sarebbe ... andassero
- D) Fosse ... andrebbero

34. Se questa lettera è per Maria, voglio consegnare

- A) Gliene ... io
- B) Gliela ... me stesso
- C) A lei ... io stesso
- D) Gliela ... io

35. Abbiamo visitato solo

- A) Le città più importante
- B) Le città più importantissime
- C) Le città più importanti
- D) Le città molto importante

36. si svolgerà la riunione dei ...

- A) Alle sedici ... colleghi
- B) Alle ore sedici ... colleghe
- C) Alle sedice ore ... collegati
- D) A sedici ... collegiali

37. Giotto (1266 – 1337) nacque nel e morì nel

- A) Duecento ... Trecento
- B) Trecento Quattrocento
- C) quattordicesimo secolo ... quindicesimo secolo
- D) dodicesimo secolo ... tredicesimo secolo

38. Non Se succede qualche cosa, ...

- A) Preoccuparsi ... telefonami
- B) Ti preoccupa ... telefonarmi
- C) Ti preoccupare ... telefonami
- D) Preoccuparti ... telefonarmi

39. Ho la macchina. Ora è molto

- A) carico ... carica
- B) caricato caricata
- C) carico ... caricata
- D) caricato ... carica

LYCEE STANISLAS - PCSI/MPSI - 2026-2027 - ALLEMAND LV2 Mme Kiderlen

Liebe Studentinnen und Studenten,

Herzlich Willkommen in der Deutschklasse der classe Prépa Stanislas !

Afin de préparer au mieux la rentrée, je vous propose

- un premier **exercice d'entraînement sous forme de QCM** (compréhension, lexique, grammaire). écoutez et lisez le texte et faites les exercices interactives sur le site suivant :

<https://learngerman.dw.com/de/handy-aus-offline-sein-ist-im-trend/1-72709529>

-un autre exercice sous forme de QCM , à rendre: **Attention, c'est le format et le niveau de concours qui sera attendu dans 2 ans, donc c'est normal si vous le trouvez difficile !**

-Preparez une courte **rédaction: Schreiben Sie über eine Reise die Sie gemacht haben, oder das Projekt für eine Reise, die Sie gerne machen würden.** (etwa 100 Wörter)).

-**Réviser les bases grammaticales** à l'aide de la grammaire indiquée dans la bibliographie :

Chapitres 1-7 : lisez la leçon (page rose) et faites au moins la première page d'exercices de chaque chapitre, à l'oral à haute voix, avec autocorrection (en fin de livre), et à l'écrit (sur un papier à part) si vous voyez que vous avez de grosses lacunes.

Bibliographie :

-Nous allons travailler dans l'année avec la **grammaire**

«Grammaire allemande par les exercices » , éditions Bordas

(l'intitulé « collège » est très trompeur, n'en tenez pas compte)

-Par ailleurs, commencez – dès à présent - à vous familiariser avec les réalités allemandes via les **sites internet de la presse** du pays. Le site www.dw.de , par exemple, vous offre non seulement un regard sur les actualités allemandes et mondiales, mais aussi une rubrique « Deutsch lernen », très précieuse.

Gute Arbeit und schöne Ferien !

Ihre Deutschlehrerin

Dagmar KIDERLEN

dkiderlen@stanislas-cannes.com

Die Freiheit auf Europas Straßen

Der Alltag eines europäischen Lastwagenfahrers

Es ist später Nachmittag, Sommer am Westhafen in Berlin. Michael Panzer ist gerade nach einer Nachttour aufgewacht – zurück aus England. Kurz vor 18 Uhr muss er wieder los, den LKW (=Lastwagen) von Neuem beladen. Es geht nach Italien. Panzer ist 22 Jahre alt und seit vier Jahren bei einem Berliner Logistikunternehmen angestellt. Während seiner meist 17-tägigen Touren fährt er nach Frankreich, Italien, Spanien, in die Benelux-Staaten und nach England, bevor er dann vier Tage Pause hat. Er erinnert sich noch gut an seine erste Fahrt quer durch Europa: Sein Vater, ebenfalls Truck-Fahrer, nahm ihn in den Sommerferien immer mit auf eine Lieferung von Berlin nach Spanien.

Lange Fahrten auf den Straßen Europas gehören zum Alltag von LKW-Fahrern im Güterfernverkehr. Seit 2006 regelt die EU ganz genau, wie lange sie hinter dem Steuer sitzen dürfen und wann sie Pause machen müssen: 4,5 Stunden fahren, dann 45 Minuten Pause, dann wieder 4,5 Stunden fahren. (...)

Michael Panzer mag die Fahrten in andere Länder. Auch wenn man ganz schön viel Konzentration braucht, gerade nachts. Die vorgeschriebenen Ruhezeiten und seine Freizeit während der Fahrten verbringt Michael Panzer meistens direkt im Fahrerhaus seines grauen LKWs. Das ist mit rotem Stoff und Vorhängen dekoriert. (...) Zwei Stunden putzt er sein "Haus auf vier Rädern", jedes Wochenende.

Auch wenn er wieder zurück in Berlin ist und neue Ware aufgeladen wird, schläft Michael meistens in seinem LKW, denn der Weg nach Hause lohnt sich bei der kurzen Pause nicht. In seiner Freizeit, wenn er den LKW auf einem Parkplatz abstellt, telefoniert er mit Freunden oder schaut auf seinem Laptop DVDs.

Für das Fernfahren müsse man allein sein können, sagt Panzer. Besonders unter Jugendlichen ist es deswegen wenig beliebt. Meistens fährt man aneinander vorbei. Oft fehlt die gemeinsame Sprache. Trifft man sich doch einmal unterwegs, dann eher mit deutschen Fahrern. Zumeist tauscht man gegenseitige Erlebnisse aus, redet über Diebstähle oder Unfälle oder gibt sich gegenseitig Starthilfe. (...)

Michael Panzer ärgert es, wenn Menschen in Reisebussen ihn anstarren, wenn er auf einem Parkplatz mit anderen Fahrern grillt – oder wenn er im Sommer ein Zubehör seines Trucks zur Dusche umfunktioniert und sich wäscht. Das wäre der große Unterschied zwischen den Touristen der Reisebusse und den Menschen, die es auf den Parkplätzen auch noch gibt, die Flüchtlinge im Verborgenen.

Wenn der Fernfahrer zwischen Frankreich und England unterwegs ist und Flüchtlinge durch die Plane zwischen die Waren klettern würden, dann müsste er wegen Schlepperei Strafe zahlen, sagt er. Einem Kollegen von ihm sei das passiert. Manche fahren deswegen im Hafen vor dem Übersetzen in eine Selbstteströhre, um zu kontrollieren, dass niemand mitfährt. Panzer geht deswegen in Holland zur Toilette und fährt dann über vier Stunden bis auf die Fähre ohne Stopp durch.

Auf seinem Weg sieht er die Menschen, die am Straßenrand leben. Manchmal fragt er sich, warum jemand nach Europa kommt, wenn er hier so wenig hat. "Damit kann ich nicht so viel anfangen", sagt Panzer, wenn man ihn nach Europa fragt.

Der europäische Warenaustausch ist in den letzten Jahren immer wichtiger geworden. Allein für deutsche Unternehmen sind 445.810 Fahrer in 207.541 LKW unterwegs. Die deutschen [Logistik](#)-Unternehmen **machten** im Jahr 2011 über 31,7 Milliarden Euro **Umsatz**. Unter LKW-Fahrern gilt Deutschland als Verbindungsstück zwischen Ost und West. (...)

"Das ist nicht mehr die große Freiheit, allein auf der Landstraße", sagt ein Logistik-Unternehmer aus Berlin über die Arbeit als Fernfahrer. Die Route gibt das Unternehmen vor. Die Fahrer werden über GPS oder andere Systeme genau kontrolliert und oft **niedrig bezahlt**. In Deutschland hat die Branche Nachwuchsprobleme. Es werden Stellen ausgeschrieben, aber es gibt keine Bewerbungen. Michael Panzer gefällt seine Arbeit. (...) War er mal **14 Tage am Stück** zu Hause, dann will er wieder zurück auf die Straße.

In Michael Panzers Familie fahren alle LKW, der Bruder fährt Trucks für Bands, während sie auf Tour sind. Vater und Mutter fahren gemeinsam Lebensmittel quer durch Europa. Ja, ohne EU würde seine Arbeit ganz anders aussehen, sagt Michael Panzer. Er fährt nur in die westeuropäischen **EU-Mitgliedsstaaten**, oft im Schengen Raum. Gern würde er auch mal Richtung Osten fahren..(...)

Aus : Fluter - 29.7.2013

COMPREHENSION - Choisissez la bonne réponse en vous référant au texte

1. Michael Panzer ist Lastwagenfahrer

- a. seit 22 Jahren
- b. seitdem er 18 ist
- c. seitdem er 22 ist
- d. für die nächsten vier Jahre

2. Michael Panzer fährt durch Europa

- a. alle vier Tage
- b. immer vier Tage lang
- c. meistens siebzehn Tage lang
- d. nur durch vier Länder

3. Die Lastwagenfahrer in Europa

- a. dürfen nie länger als 4,5 Stunden pro Tag fahren
- b. dürfen nie länger als 4,5 Stunden infolge fahren
- c. können selber entscheiden, wann sie Pause machen
- d. dürfen nie länger als 45 Minuten infolge fahren

4. Michael Panzer meint,

- a. Lastwagenfahrer müssen sich gut konzentrieren können
- b. Lastwagenfahrer müssen mit Menschen umgehen können
- c. Lastwagenfahrer können keine Familie haben
- d. Lastwagenfahrer ist nicht sein Traumjob

5. Michael Panzer muss nach Berlin fahren,

- a. um seinen Lastwagen zu putzen
- b. wenn er schlafen möchte
- c. um neue Waren zu holen
- d. um seinen Lastwagen auszuladen

6. Auf seine Tours

- a. trifft sich Michael jeden Tag mit anderen Fahrern
- b. hat vor allem mit ausländischen Fahrern zu tun
- c. fährt Michael mit Anderen zusammen
- d. ist Michael oft allein

7. Manchmal

- a. duscht Michael auf einem Parkplatz
- b. trinkt Michael ein Bier auf einem Parkplatz
- c. fährt Michael Reisebusse
- d. möchte Michael lieber Reisebusfahrer sein

8. Wenn Lastwagenfahrer Flüchtlinge nach England transportieren

- a. ist es kein Problem
- b. müssen sie eine Strafe bezahlen
- c. können sie Geld verdienen
- d. machen sie das immer freiwillig

9. Michael Panzer

- a. transportiert Flüchtlinge von Holland nach England
- b. kontrolliert immer seinen Wagen in einer Teströhre
- c. versteckt Flüchtlinge zwischen den Waren im Lastwagen
- d. hat Angst vor Flüchtlingen, die in seinen Wagen einsteigen könnten

10. Die Unternehmen

- a. bestimmen die Route für den Lastwagenfahrer
- b. mischen sich in die Freiheit der Fahrer nicht ein
- c. investieren selten in GPS
- d. müssen nur wissen, wann die Waren ankommen

11. Die Jugendlichen

- a. interessieren sich wenig für den Beruf von Michael
- b. sind bei Lastwagenfahrer überrepräsentiert
- c. finden oft keinen Job als Lastwagenfahrer
- d. wachsen gerne im Lastwagen auf

12. Bei der Familie von Michael

- a. ist nur noch der Bruder Lastwagenfahrer
- b. fahren Vater, Mutter und Bruder alle unterschiedliche Lastwagen
- c. fahren der Vater und der Bruder zusammen Lastwagen
- d. fahren der Vater und die Mutter zusammen Lastwagen

LEXIQUE - que signifient ces expressions?

13. ebenfalls

- a. früher
- b. auch
- c. damals
- d. zufällig

14. Die vorgeschriebenen Ruhezeiten

- a. die Ruhezeiten, die man halten sollte
- b. die Ruhezeiten, die man aufschreibt
- c. die Ruhezeiten, die man halten kann
- d. die Ruhezeiten, die man halten muss

15. Zwei Stunden putzt er

- a. macht er sauber
- b. findet er putzig
- c. macht er kaputt
- d. kocht er etwas für die Woche

16. lohnt sich bei der kurzen Pause nicht

- a. ist nicht schön
- b. ist zeitlich nicht rentabel
- c. ist zeitlich nicht machbar
- d. langweilt ihn

17. den LKW auf einem Parkplatz abstellt

- a. verlässt
- b. parkt
- c. entlädt
- d. wechselt

18. Zumeist

- a. meistens
- b. die ganze Zeit
- c. ständig
- d. selten

19. Menschen in Reisebussen ihn anstarren

- a. winken
- b. unterhalten
- c. fixieren
- d. stoppen

20. die Flüchtlinge

- a. die Menschen, die oft fliegen
- b. die Menschen, die fluchen
- c. die Menschen, die aus ihrer Heimat geflüchtet sind
- d. die Menschen, die in ihrer Heimat verflucht sind

21. machten (...) über 31,7 Milliarden Euro Umsatz

- a. verdienen
- b. verlieren
- c. ausgeben
- d. umsetzen

22. niedrig bezahlt

- a. unregelmäßig bezahlt
- b. wenig bezahlt
- c. nie bezahlt
- d. ausreichend bezahlt

23. 14 Tage am Stück

- a. 14 Tage insgesamt
- b. 14 Tage nacheinander
- c. 14 Tage bei der Arbeit
- d. 14 Tage bei einem Theaterstück

24. EU-Mitgliedsstaaten

- a. Staaten, die zur EU gehören
- b. Staaten, die an Europa grenzen
- c. Staaten, die außerhalb Europa liegen
- d. Staaten, die mit Europa kooperieren

GRAMMAIRE - Choisissez la réponse adéquate

25. Michael die besten Wege durch Europa

- a. kann
- b. kennt
- c. weiß
- d. wisst

26. Michael hat mit seinem Job früh ...

- a. anfängt
- b. anfang
- c. angefangen
- d. angefangt

27. Es gibt Kontrollen, wenn er fahren will

- a. nach Schweiz
- b. in die Schweiz
- c. in den Schweiz
- d. in Schweiz

28. ... fährt man am besten durch Europa?

- a. Wie
- b. Wo
- c. Inwiefern
- d. Wieso

29. Michaels Bruder interessiert sich ...

- a. von Rockmusik
- b. an Rockmusik
- c. für Rockmusik
- d. auf Rockmusik

30. Michael ... am Mittwoch nach Barcelona ...

- a. wäre ... fahren
- b. würde ... gefahren
- c. wäre ... gefahren sein
- d. wird ... fahren

31. Michaels Lastwagen ist der von seinem Vater

- a. so schwer als
- b. wie schwer wie
- c. sowie schwer
- d. schwerer als

32. Um Lastwagenfahrer zu werden man fahren mögen

- a. muss
- b. kann
- c. will
- d. darf

33. Michael 13 war, wusste er schon, welchen Beruf er machen will.

- a. Da
- b. Wenn
- c. Als
- d. Indem

34. In Berlin kann er

- a. nach Hause schlafen
- b. zu Hause schlafen
- c. in Hause schlafen
- d. beim Hause schlafen

35. Der Lastwagen, Farben rot und weiß sind, gehört ihm.

- a. dessen
- b. deren
- c. denen
- d. diejenigen

36. Beim fahren muss man folgen

- a. auf die Straße
- b. die Straße
- c. der Straße
- d. bei der Straße

37. Michaels Bruder fragt sich, ... er nicht in Berlin wohnen möchte

- a. ob
- b. wenn
- c. als
- d. obwohl

38. er drei Wochen auf Tour war, kommt er gerne heim

- a. Nach
- b. Nachdem
- c. Vor
- d. Wonach

39. Michael meint,

- a. er darf im Wagen gut schlafen
- b. er will im Wagen gut schlafen
- c. er wollte im Wagen gut schlafen
- d. er könnte im Wagen gut schlafen